

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prova scritta di Matematica Applicata

3 novembre 2015

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

e si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice  $A$ . La si utilizzi per calcolare il determinante di  $A$  e si deduca se  $A$  è invertibile. Se lo è, si calcoli, mediante la fattorizzazione  $PA=LU$ , la quarta colonna della matrice inversa.

2. Si consideri il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dire per quali valore del parametro reale  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e per quali il metodo di Gauss-Seidel è convergente. Fissato  $\alpha = 3$ , si calcolino quindi le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire da  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 2, 3]^T$ .

3. Classificare la seguente formula alle differenze finite per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{\alpha h}{3} [f(x_i, \eta_i) + 3f(x_i + \frac{\alpha h}{3}, \eta_i + \frac{\alpha h}{3} f(x_i, \eta_i))] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e studiarne la convergenza e l'ordine al variare del parametro reale  $\alpha$ .

4. Risolvere ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y'' + 2y' + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ f(x+1), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale in  $\mathbb{R}$

$$3y' - y = e^{-4x} H(x).$$