

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

19 novembre 2015

Compito numero 1

1. A partire dai seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

si crei mediante il procedimento di Gram-Schmidt una base di vettori ortonormali $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Si consideri poi la matrice $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, si dica se questa è ortogonale e si indichi la sua inversa.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & a+3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile. Fissato $a = 1$, si calcoli lo spettro di A , il suo raggio spettrale e per quale valore di b la matrice $C = LU$ è l'inversa di A . Fissato tale valore di b , motivando la risposta, si dica qual'è lo spettro di C^2 , il suo raggio spettrale e il determinante di AC^2 .

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$2y'' + 3y' + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -2 - x, & -1 \leq x < 0, \\ 2 - x, & 0 \leq x < 1, \\ f(x+2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\cos 3x}{x^2 + 5} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{5ik}}{2 + i(6 + 3k)} \right\}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y' - \sqrt{3}y = e^{-(x-3)}H(x-3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

19 novembre 2015

Compito numero 2

1. A partire dai seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si crei mediante il procedimento di Gram-Schmidt una base di vettori ortonormali $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Si consideri poi la matrice $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, si dica se questa è ortogonale e si indichi la sua inversa.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 2 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & \alpha + 3 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/8 \end{bmatrix},$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale α la matrice A è invertibile. Fissato $\alpha = 1$, si calcoli lo spettro di A , il suo raggio spettrale e per quale valore di β la matrice $C = LU$ è l'inversa di A . Fissato tale valore di β , motivando la risposta, si dica qual'è lo spettro di C^2 , il suo raggio spettrale e il determinante di AC^2 .

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$y'' + 2y' + 3y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -2 - x, & -1 \leq x < 0, \\ -2 + x, & 0 \leq x < 1, \\ f(x + 2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\sin 2x}{x^2 + 3} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-4ik}}{5 + i(6 - 2k)} \right\}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y' - \sqrt{2}y = e^{-(x-2)}H(x-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$