

Nome e matricola:

Corso di studi:

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata

29 gennaio 2016

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_2 + 6x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

2. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Stabilire per quali valori dei parametri α e β la matrice A è invertibile e per quali è simmetrica definita positiva. Si consideri poi il sistema $Ax = b$ con $b = [1 \ -2 \ 0]^T$. Si studi al variare dei parametri α e β la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T$.

3. Si calcoli per quali valori del parametro $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

è ortogonale e fissato uno di questi valori si determini il raggio spettrale. Sia ora $\theta = \pi$. Si determini il condizionamento in norma 2 di A e si calcoli nel modo più conveniente possibile la soluzione del sistema $A^2x = b$ con $b = [1 \ -2 \ 0]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy' - 3y + x & x \in [0, 5] \\ y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1 \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = \frac{1}{2}$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$.

Esercizio 5 sul retro del foglio

5. Dire per quali valori dei parametri α, β reali positivi il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h \left[\left(2 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} \right) f(x_k, \eta_k) + \frac{\alpha}{3} f(x_k + \alpha h, \eta_k + \alpha h f(x_k, \eta_k)) \right].$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = 2\eta_k - (1 + 4\gamma^2)\eta_{k-1} + h \left[(2 - \gamma) \frac{3}{2} f(x_k, \eta_k) + \frac{\gamma}{2} f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$