

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prova scritta di Matematica Applicata

14 gennaio 2016

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix}$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono due parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e per quali la matrice  $A$  è definita positiva. Si calcoli per quali valori di  $\beta$   $B$  è la matrice inversa di  $A$ . Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di  $\alpha$  il condizionamento di  $A$  con indice 1, 2,  $\infty$ .

2. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

3. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite e se ne studi la stabilità

(a)  $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\gamma}{3}h [f(x_k, \eta_k) + \frac{\gamma}{2}f(x_k + \frac{h}{\delta}, \eta_k + \frac{h}{\delta}f(x_k, \eta_k))]$ ,  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ,

(b)  $\eta_{k+1} = 2\eta_k - 3\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$ .

Si determini, inoltre, se sono convergenti e, in caso affermativo, il relativo ordine.

4. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{5 - 2i(x+3)} \right\}, \quad \mathcal{F} \{ (3x - 5)H(-x)e^{2x} \}.$$

dove  $H(x)$  denota la funzione di Heaviside.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + y' - 6y = \delta(x - 3), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove  $\delta(x)$  indica la delta di Dirac.

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova scritta di Matematica Applicata**

14 gennaio 2016

Compito numero 2

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 4\delta & -\delta \\ 0 & -\delta & 3\delta \end{bmatrix}$$

dove  $\gamma$  e  $\delta$  sono due parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro  $\gamma$  la matrice  $A$  è invertibile e per quali la matrice  $A$  è definita positiva. Si calcoli per quali valori di  $\delta$   $B$  è la matrice inversa di  $A$ . Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di  $\gamma$  il condizionamento di  $A$  con indice 1, 2,  $\infty$ .

2. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

3. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite e se ne studi la stabilità

(a)  $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha}{4}h \left[ f(x_k, \eta_k) + \alpha f \left( x_k + \frac{h}{\beta}, \eta_k + \frac{h}{\beta}f(x_k, \eta_k) \right) \right], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

(b)  $\eta_{k+1} = \frac{1}{2}\eta_k - 2\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k).$

Si determini, inoltre, se sono convergenti e, in caso affermativo, il relativo ordine.

4. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{5 - 2i(x+3)} \right\}, \quad \mathcal{F} \{ (3x - 5)H(-x)e^{2x} \}.$$

dove  $H(x)$  denota la funzione di Heaviside.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + y' - 6y = \delta(x - 3), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove  $\delta(x)$  indica la delta di Dirac.