Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

29 gennaio 2016

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_2 + 6x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

   e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

2. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   Stabilire per quali valori dei parametri α e β la matrice A è invertibile e per quali è simmetrica definita positiva. Si consideri poi il sistema $Ax = b$ con $b = [1 \ -2 \ 0]^T$. Si studi al variare dei parametri α e β la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy' - 3y + x \quad & x \in [0, 5] \\ y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1 \end{cases}$$

   e approssimare la soluzione in $x = \frac{1}{2}$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}(x + \frac{\pi}{2}), & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \\ \cos(x), & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{2}{\pi}(x - \frac{\pi}{2}), & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{3x \sin 6x}{16x^2 + 3}\right\}, \qquad (H(x+3) - H(x-4)) * (e^{-3|x|})$$

   dove H denota la funzione di Heaviside.