Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
10 giugno 2016

1. Assegnata la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
si determini i valori del parametro reale α che rendono A singolare, quelli che la rendono definita positiva, e quelli per i quali risulta convergente il metodo di Gauss–Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (5, 6, 5)^T$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, col vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

   Soluzione. Non singolare per $\alpha \neq \pm\sqrt{15}$. Definita positiva per $-\sqrt{15} < \alpha < \sqrt{15}$. Gauss-Seidel converge per $-\sqrt{15} < \alpha < \sqrt{15}$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 3/2, 1)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (7/8, 1, 7/8)^T$.

2. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 6 & 11 \\ 8 & 4 & 4 & 10 \\ 16 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 17 \end{bmatrix},$$
la si utilizzi per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (8, 8, 16, 8)^T$, e per determinare la seconda colonna di A^{-1}.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)^T$, $A^{-1}\mathbf{e}_2 = (1/6, 1/6, -3/2, 1/2)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine
$$\begin{cases} y'' = 0.1(1 - y^2)y' - y, & x \in [0, 3] \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$
e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 1$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -1/2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (3/4, -1)^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alle serie di Fourier, la seguente equazione differenziale in $[-2,2]$

$$\sqrt{2}y'' + 3y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x < -1, \\ x^2, & -1 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{2}{9} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{32}{(12-\sqrt{2}k^2\pi^2)k^2\pi^2} \left(\cos k\frac{\pi}{2} - \frac{2}{k\pi} \sin k\frac{\pi}{2} \right) \cos k\frac{\pi}{2}x.$$

5. Con riferimento alla trasformata di Fourier, calcolare

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\sin 3k}{5k(6-2\mathrm{i}k)} \right\}, \quad \mathcal{F}\left\{ \frac{x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{6-2\mathrm{i}x} \right\}.$$

Soluzione.

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{9} - \mathrm{e}^{-9}), & x \le -3, \\ \frac{1}{60}\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-9}), & -3 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$F_2(k) = \begin{cases} -3\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-3(k-2)}, & k \ge 2, \\ 0, & k < 2. \end{cases}$$