Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

6 luglio 2016

1. Assegnata la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
si determini i valori del parametro reale a che rendono A singolare, quelli che la rendono definita positiva, e quelli per i quali risulta convergente il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 1, 0)^T$. Posto $a = 1/2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, col vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

   Soluzione. Singolare per $a = 0, \pm 1$. Definita positiva per $0 < a < 1$. Jacobi converge per $-1 < a < 1$ con $a \neq 0$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (1, -2, -1/2)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (5/4, 0, -1/2)^T$

2. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
la si utilizzi per calcolare il determinante di A, per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 2, 0, 1)^T$, e per determinare la prima colonna di A^{-1}.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   $\det(A) = -6$, $\mathbf{x} = (1/3, -1/3, 2/3, 2)^T$, $A^{-1}\mathbf{e}_1 = (1/2, 1/2, 0, 1/2)^T$.

3. Si approssimi la soluzione del seguente problema di Cauchy in $x = 1$
$$\begin{cases} y' = (1 + y)x, & x \in [0, 3] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

utilizzando il seguente schema con passo $h = \frac{1}{2}$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, \eta_k + \frac{h}{2} f(x_k, \eta_k)\right).$$

Soluzione. $\eta_1 = 5/4$, $\eta_2 = 563/256$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = |x - 2|, \quad x \in [-1, 1].$$

Soluzione.

$$y(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi x).$$

5. Con riferimento alla trasformata di Fourier, calcolare

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i(k-7)}{(k-7)^2+3}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{x}{3}H(x-3)e^{-x}\right\}.$$

Soluzione.

$$f_1(x) = -\frac{e^{7\mathrm{i}x}}{2}(e^{-\sqrt{3}x}H(x) - e^{\sqrt{3}x}H(-x))$$

$$F_2(k) = \frac{e^{-3(1+\mathrm{i}k)}}{3}\left(\frac{3}{1+\mathrm{i}k} + \frac{1}{(1+\mathrm{i}k)^2}\right)$$