

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

21 settembre 2016

1. Si stabilisca se la seguente matrice è ortogonale

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Si calcoli, quindi, la sua inversa e il condizionamento di A in norma 2,1 e ∞ . Si determini, inoltre, nel modo più conveniente possibile la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = [1, -1, 1]^T$.

Soluzione. A è ortogonale. $A^{-1} = A^T$. $\kappa_2(A) = 1$, $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = \frac{10(1+\sqrt{2})}{9}$, $\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} = [0, 5/3, -\sqrt{2}/3]^T$.

2. Si determini, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, la soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Si calcoli, inoltre, sempre mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{10} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1]^T, \quad \det(A) = -58.$$

3. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha + 2} [f(x_k, \eta_k) + 4f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))].$$

Soluzione. Stabile $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Consistente (e quindi convergente) per $\alpha = 3$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Del secondo ordine per $\alpha = 3$ e $\beta = 5/8$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{2}, & -2 \leq x < 0, \\ 1 - \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 2, \\ f(x+4), & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^k)}{k^2 \pi^2} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2}{(3+ik)(3-ik)} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{(x-6)H(x-6)}{\sqrt{3}e^{\sqrt{2}x}} \right\}.$$

Soluzione.

$$f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-3|x|}, \quad F_2(k) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e^{-6(\sqrt{2}+ik)}}{(\sqrt{2}+ik)^2}.$$