Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

15 novembre 2016

Compito numero 1

1. A partire dai seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   si costruisca, mediante il procedimento di Gram-Schmidt, l'insieme di vettori ortonormali $\{q_1, q_2, q_3\}$. Si consideri poi la matrice $A = [q_1, q_2, q_3]$. Dopo aver calcolato $B = A^T A$, si dica se la matrice A è invertibile e si indichi la sua inversa.

   Soluzione.

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{110}}{11} \\ \frac{\sqrt{110}}{110} \\ \frac{3\sqrt{110}}{110} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{3\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix}.$$

2. Si consideri il vettore $\mathbf{v} = [0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]^T$ e si calcoli la sua norma ∞, 1 e 2. Si considerino poi le matrici

$$A = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \qquad B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \beta \\ 0 & \beta & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

   Si determini il valore del parametro β che rende B l'inversa della matrice A, si dica se C è una matrice ortogonale e si indichi la sua inversa. Si calcoli lo spettro e il raggio spettrale della matrice A e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, quali sono gli autovalori di B e di B^2 se a β si assegna il valore trovato.

   Soluzione.

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \|\mathbf{v}\|_1 = \sqrt{3}, \qquad \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}, \qquad \beta = -4$$

   La matrice C è ortogonale e quindi $C^{-1} = C^T$.

$$\sigma(A) = \{1, 1, -7/3\}, \qquad \rho(A) = 7/3, \quad \sigma(B) = \{1, 1, -3/7\}, \qquad \sigma(B^2) = \{1, 1, 9/49\}$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-5, 5]$

$$y' + \sqrt{3}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{5}x, & -5 \le x < 0, \\ 2 - \frac{3}{5}x, & 0 \le x < 5. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_y(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{150\sqrt{3}(1 + (-1)^{k+1})}{k^2\pi^2(75 + k^2\pi^2)} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{5} x \right) + \left(\frac{30(1 + (-1)^{k+1})}{k\pi(75 + k^2\pi^2)} \right) \sin\left(\frac{k\pi}{5} x \right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\sin 7x}{2 + 3\mathrm{i}x} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}k}}{k^2 - 10k + 28} \right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi}{3i}(e^{\frac{2}{3}(k-7)}H(7-k) - e^{\frac{2}{3}(k+7)}H(-k-7))$$
$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{5i(x-3)} e^{-\sqrt{3}|x-3|}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-7y' + y = H(x+5) - H(x+1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{7}x}(e^{\frac{5}{7}} - e^{\frac{1}{7}}) & x < -5 \\ e^{\frac{1}{7}x}(e^{-\frac{1}{7}x} - e^{\frac{1}{7}}) & x \in [-5, -1] \\ 0 & x > -1 \end{cases}$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

15 novembre 2016

Compito numero 2

1. A partire dai seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

si costruisca, mediante il procedimento di Gram-Schmidt, l'insieme di vettori ortonormali $\{q_1, q_2, q_3\}$. Si consideri poi la matrice $A = [q_1, q_2, q_3]$. Dopo aver calcolato $B = A^T A$, si dica se la matrice A è invertibile e si indichi la sua inversa.

Soluzione.

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ -\frac{\sqrt{22}}{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{3\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix}.$$

2. Si consideri il vettore $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T$ e si calcoli la sua norma ∞, 1 e 2. Si considerino poi le matrici

$$A = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Si determini il valore del parametro α che rende B l'inversa della matrice A, si dica se C è una matrice ortogonale e si indichi la sua inversa. Si calcoli lo spettro e il raggio spettrale della matrice A e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, quali sono gli autovalori di B e di B^2 se ad α si assegna il valore trovato.

Soluzione.

$$\|\mathbf{w}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \|\mathbf{w}\|_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \|\mathbf{w}\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \alpha = 2$$

La matrice C è ortogonale e quindi $C^{-1} = C^T$.

$$\sigma(A) = \{1, 1, -1/3\}, \qquad \rho(A) = 1, \quad \sigma(B) = \{1, 1, -3\}, \qquad \sigma(B^2) = \{1, 1, 9\}$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-3,3]$

$$7y' - y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3+x), & -3 \le x < 0, \\ \frac{1}{3}(x-3), & 0 \le x < 3. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{14}{3(1+\frac{49}{9}k^2\pi^2)} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{3}x\right) + \left(\frac{2}{k\pi(1+\frac{49}{9}k^2\pi^2)} \right) \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\cos 2x}{5-4\mathrm{i}x}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}}{k^2+8k+20}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi}{4}(e^{-\frac{5}{4}(k-2)}H(k-2) + e^{-\frac{5}{4}(k+2)}H(k+2))$$
$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-4i(x+3)}e^{-2|x+3|}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$\sqrt{3}y' - y = H(x+7) - H(x+3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}(e^{\sqrt{3}} - e^{\frac{7}{\sqrt{3}}}) & x < -7 \\ e^{\frac{1}{\sqrt{3}}(x+3)} - 1 & x \in [-7,-3] \\ 0 & x > -3 \end{cases}$$