Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

13 gennaio 2016

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & \alpha & -2 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ -2 & \alpha & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$. Si determinino i valori del parametro α che rendono B l'inversa di A e si calcoli l'indice di condizionamento della matrice A in norma ∞, 1 e 2. Si dica, inoltre, sulla base dei calcoli fatti e motivando la risposta se A è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di β che rendono C una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{w}$.

Soluzione. B è l'inversa di A se $\alpha = 2$, $\mathrm{cond}_\infty(A) = \mathrm{cond}_1(A) = 7$, $\mathrm{cond}_2(A) = 5$. A non è definita positiva. C è ortogonale se $\beta = \pm\sqrt{3}$. Se $\beta = \sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}]^T$ mentre se $\beta = -\sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}]^T$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ -4x_1 = 4 \\ 8x_1 + 8x_2 - 8x_3 + 8x_4 = -8 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 8 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 64, \quad \mathbf{x} = [-1, 0, 1, 1]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \frac{\alpha}{3} x_3 = 4 \\ \alpha x_2 + \frac{1}{3} x_3 = 3 \\ \frac{\alpha}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = \frac{1}{5}$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{4}$ oppure $\alpha > \frac{\sqrt{2}}{4}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [20, 15, 10/3]^T$, $\quad \mathbf{x}^{(2)} = [170/9, 85/9, -80/3]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (y+1)x - y', \quad x \in [\frac{1}{4}, 5] \\ y(\frac{1}{4}) = 0, y'(\frac{1}{4}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{4}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{4}, \frac{13}{16})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{29}{64}, \frac{49}{64})^T$.

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

   (a) $\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\left(\frac{1}{2} - \delta^2\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{3\delta}{2} f\left(x_k + h, \eta_k + h f(x_k, \eta_k)\right)\right]$,

   (b) $\eta_{k+1} = (2\delta - \frac{5}{4})\eta_k - (\delta - 1)(\delta - \frac{1}{4})\eta_{k-1} + 2h(\delta + 1) f(x_k, \eta_k)$.

Si determinino i valori di $\delta \in \mathbb{R}$ che, oltre a rendere stabili entrambi i metodi, garantiscono un ordine di convergenza pari a 1 nel metodo monostep.

Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ ed ha ordine di convergenza pari a 1 se $\delta = 1$ oppure $\delta = 1/2$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se $0 \leq \delta \leq 5/4$. I valori cercati, pertanto, sono $\delta = 1$ e $\delta = 1/2$.

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

13 gennaio 2016

Compito numero 2

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = I - 6\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \beta & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 2 \\ -2 & 2 & \beta \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

dove $\mathbf{v} = [\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]^T$. Si determinino i valori del parametro β che rendono B l'inversa di A e si calcoli l'indice di condizionamento della matrice A in norma ∞, 1 e 2. Si dica, inoltre, sulla base dei calcoli fatti e motivando la risposta se A è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di α che rendono C una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{v}$.

Soluzione. B è l'inversa di A se $\beta = 3$, $\mathrm{cond}_\infty(A) = \mathrm{cond}_1(A) = 7$, $\mathrm{cond}_2(A) = 5$. A non è definita positiva. C è ortogonale se $\alpha = \pm\sqrt{3}$. Se $\alpha = \sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}]^T$ mentre se $\alpha = -\sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}]^T$.

2. Si calcoli la fattorizzatione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ -4x_1 = 4 \\ 8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 16 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 64, \quad \mathbf{x} = [-1, 0, 1, 2]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \frac{\alpha}{3} x_3 = 4 \\ \alpha x_2 + \frac{1}{3} x_3 = 3 \\ \frac{\alpha}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = \frac{3}{2}$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$. Il metodo di Jacobi converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{4}$ oppure $\alpha > \frac{\sqrt{2}}{4}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [8/3, 2, -2/3]^T$, $\quad \mathbf{x}^{(2)} = [26/9, 58/27, -188/243]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (x+1)y + y', \quad x \in [\frac{1}{4}, 5] \\ y(\frac{1}{4}) = 1, y'(\frac{1}{4}) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{4}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, \frac{5}{16})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{69}{64}, \frac{49}{64})^T$.

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

   (a) $\eta_{k+1} = (2\gamma - \frac{9}{8})\eta_k - (\gamma - 1)(\gamma - \frac{1}{8})\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$

   (b) $\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\left(\frac{1}{4} - \gamma^2\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{7\gamma}{4} f\left(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k)\right)\right]$.

   Si determinino i valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ che, oltre a rendere stabili entrambi i metodi, garantiscono un ordine di convergenza pari a 1 nel metodo monostep.

   Soluzione. Lo schema (a) è multistep esplicito ed è stabile se $0 \leq \gamma \leq 9/8$. Lo schema (b) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$ ed ha ordine di convergenza pari a 1 se $\gamma = 1$ oppure $\gamma = 3/4$. I valori cercati, pertanto, sono $\gamma = 1$ e $\gamma = 3/4$.