Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata

31 gennaio 2017

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, e la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 1, \quad \mathbf{x} = [-1, 2, -3, 4]^T, \quad \mathbf{x^{(3)}} = [0, 1, -2, 1]^T.$$

2. Assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali valori il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta convergente. Fissato $a = 2$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

Soluzione. Il sistema ammette un'unica soluzione se $a \neq \pm\sqrt{7}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-\sqrt{7} < a < \sqrt{7}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1, 1/4, -1/2]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/4, 7/8, -1/8]^T$.

3. Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}.$$

Si calcolino i valori di α e β che rendono M l'inversa di L e, fissati tali valori, si determini il condizionamento di L in norma 1 e norma ∞. Si verifichi che Q sia ortogonale e si risolva nel modo più conveniente il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A = QL$ e $\mathbf{b} = [5, 5, 5]^T$.

Soluzione. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\text{cond}_\infty(L) = 40$, $\text{cond}_1(L) = 36$, $\mathbf{x} = M(Q^T\mathbf{b}) = [-17/5, -9/5, 44/5]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy' - 3y \quad x \in [-5, 5] \\ y(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, y'(-\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = \frac{1}{2}$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1, -3/2)^T$.

5. Dire per quali valori dei parametri α, β reali positivi il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\left(2 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right) f(x_k, \eta_k) - \frac{\beta}{3} f(x_k + \alpha^2 h, \eta_k + \alpha^2 h f(x_k, \eta_k))\right].$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo è stabile

$$\eta_{k+1} = -\frac{9}{25}\eta_k + h\left[(2-\gamma)\frac{3}{2} f(x_k, \eta_k) + \frac{\gamma}{2} f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$

Soluzione. Il primo metodo è stabile $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sarebbe convergente del secondo ordine per $\alpha = 2$ e $\beta = -\frac{3}{8}$, ma tali valori non sono accettabili perché $\beta < 0$. Il secondo metodo è stabile per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$.