Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
13 gennaio 2017

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & \alpha & -2 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ -2 & \alpha & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$. Si determinino i valori del parametro α che rendono B l'inversa di A e si calcoli l'indice di condizionamento della matrice A in norma ∞, 1 e 2. Si dica, inoltre, sulla base dei calcoli fatti e motivando la risposta se A è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di β che rendono C una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{w}$.

Soluzione. B è l'inversa di A se $\alpha = 2$, $\text{cond}_\infty(A) = \text{cond}_1(A) = 7$, $\text{cond}_2(A) = 5$. A non è definita positiva. C è ortogonale se $\beta = \pm\sqrt{3}$. Se $\beta = \sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}]^T$ mentre se $\beta = -\sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}]^T$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ -4x_1 = 4 \\ 8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 16 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 64, \quad \mathbf{x} = [-1, 0, 1, 2]^T$$

3. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

   (a) $\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\left(\frac{1}{2} - \delta^2\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{3\delta}{2} f\left(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k)\right)\right]$,

   (b) $\eta_{k+1} = (2\delta - \frac{5}{4})\eta_k - (\delta - 1)(\delta - \frac{1}{4})\eta_{k-1} + 2h(\delta + 1)f(x_k, \eta_k)$.

Si determinino i valori di $\delta \in \mathbb{R}$ che, oltre a rendere stabili entrambi i metodi, garantiscono un ordine di convergenza pari a 1 nel metodo monostep.

Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ ed ha ordine di convergenza pari a 1 se $\delta = 1$ oppure $\delta = 1/2$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se $0 \leq \delta \leq 5/4$. I valori cercati, pertanto, pertanto sono $\delta = 1$ e $\delta = 1/2$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < -1/2, \\ \sin(\pi x), & -1/2 \leq x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Soluzione. La funzione è dispari:

$$S_f(x) = \frac{\pi + 4}{2\pi} \sin(\pi x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left(\frac{1}{1-k^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k \right) \sin\left(k\pi x\right).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-2y'' + y = H(x+7) - H(x-3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+7)} - \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-3)}\right), & x < -7, \\ \frac{1}{2}\left(2 - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+7)} - \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-3)}\right), & -7 \leq x < 3, \\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-3)} - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+7)}\right), & x \geq 3. \end{cases}$$