Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
21 febbraio 2017

1. Calcolare, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, l'inversa della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e il condizionamento in norma 1 e in norma ∞ di A.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 2/3 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 3 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 1/3 & -2/3 & 5/6 \end{bmatrix}, \qquad \text{cond}_\infty(A) = 15 \qquad \text{cond}_1(A) = 17$$

2. Siano dati

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dire per quali valori del parametro γ la matrice A risulta non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente. Si calcolino infine le prime due iterazioni del metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

Soluzione. A è non singolare per ogni $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ed è definita positiva se $\gamma > 1$. Il metodo di Jacobi è convergente se $\gamma < -1$ oppure $\gamma > 1$ e le iterate sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/\gamma, 2/\gamma, 1/\gamma, 2/\gamma]^T$, $\quad \mathbf{x}^{(2)} = [1/\gamma, (2+\gamma)/\gamma^2, 1/\gamma, (2+\gamma)/\gamma^2]^T$.

3. Stabilire, motivando opportunamente la risposta, se il seguente metodo alle differenze finite è monostep, convergente, del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[6f(x_k, \eta_k) - 5f(x_k + 4h, \eta_k + 4hf(x_k, \eta_k))\right].$$

Calcolare inoltre, mediante il precedente metodo, la soluzione del seguente problema di Cauchy in $x = 1/2$ con passo $h = 1/2$

$$\begin{cases} y' = -3xy \quad x \in [-5, 5] \\ y(-\frac{1}{2}) = 1, \end{cases}$$

Soluzione. Il metodo alle differenze finite è monostep, convergente ma non è del secondo ordine. La soluzione del problema di Cauchy in $x = 1/2$ è $\eta_2 = 808$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$

$$y'' + 2y = -3x.$$

Soluzione.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16(-1)^k}{k\pi(8 - 9k^2\pi^2)} \sin\left(\frac{3}{2}k\pi x\right)$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-2ik}}{k^2 + 4k + 6}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\cos(x-4)}{(x-4)^2 + 1}\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{-2i(x-2) - \sqrt{2}|x-2|} \qquad F(k) = \frac{\pi}{2} e^{-4ik}\left(e^{-|k-1|} + e^{-|k+1|}\right)$$