

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

30 marzo 2017

1. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ed utilizzarla per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (-1, 1, 0, 0)^T$, e per calcolare la terza colonna di A^{-1} .

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (-1, 0, 2, -2)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = (-1, 1, 0, 0)^T.$$

2. Siano dati

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dire per quali valori del parametro β la matrice A risulta non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente. Posto $\beta = 1/2$, si calcolino infine le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

Soluzione. A è non singolare per $\beta \neq -1, 0, 1$ e non è definita positiva per nessun valore di β . Il metodo di Gauss-Seidel è convergente se $-1 < \beta < 1$ e le iterate sono $\mathbf{x}^{(1)} = (-1/2, 0, -5/4)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (-13/8, 0, -29/16)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy + (x-1)y', & x \in [1, \infty) \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = 2$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/2, -1/2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1/4, -1/4)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [-2, 0), \\ 2x - 1, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{k\pi} (3(-1)^k + 1) \right) \sin \left(k \frac{\pi}{2} x \right).$$

5. Calcolare la seguente antitrasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin 2k}{k(9 + k^2)} \right\}$$

Soluzione.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} e^{3x} (e^6 - e^{-6}), & x < -2, \\ \frac{1}{36} (2 - e^{-3(x+2)} - e^{3(x-2)}), & -2 \leq x < 2, \\ \frac{1}{36} e^{-3x} (e^6 - e^{-6}), & x \geq 2. \end{cases}$$