

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova scritta di Matematica Applicata**

30 giugno 2017

1. Determinare la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e calcolare la seconda colonna di  $A^{-1}$ .

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -12/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 12, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (-1/6, -5/6, 2/3, 1/2)^T.$$

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale  $\beta$   $A$  è invertibile, e per quali valori il metodo di Gauss Seidel risulta convergente se applicati al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Assegnato  $\beta = -1$ , calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire dal vettore iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0)^T$ .

*Soluzione.* Invertibile  $\forall \beta \neq 0$ . Gauss-Seidel converge per  $-4 < \beta < 0$ . Iterazioni di Gausse-Seidel:  $\mathbf{x}^{(1)} = (2, -1/2, 1)^T$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = (3/2, -1/4, 1/2)^T$ .

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = x(y-1)y', & x \in [\frac{1}{2}, \infty) \\ y(\frac{1}{2}) = 1, \quad y'(\frac{1}{2}) = -1, \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in  $x = \frac{3}{2}$  mediante il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{2}$ .

*Soluzione.*  $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/2, -1)^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (0, -3/4)^T$ .

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & -5 \leq x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

*Soluzione.*

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{50(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{100}{k^3\pi^3} ((-1)^k - 1) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right).$$

5. Effettuare i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2+ik)(1+\frac{1}{5}ik)} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-3ix}}{3+(x-2)^2} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2+ik)(1+\frac{1}{5}ik)} \right\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{5}{3}e^{-2x}(1-e^{-3x}), & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-3ix}}{3+(x-2)^2} \right\} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} e^{-\sqrt{3}|k+3|} e^{-2i(k+3)}.$$