

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

21 settembre 2017

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ -4x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (-3/4, -3/2, 0, 5/4)^T, \det(A) = 8.$$

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 0 \\ 4 & \beta & 4 \\ 0 & 2 & \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale β A è invertibile e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicati al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Assegnato $\beta = 8$, calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 1)^T$.

Soluzione. Invertibile $\forall \beta \neq 0, \pm 4$. Jacobi converge per $\beta < -4$ oppure $\beta > 4$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (1/8, -3/8, 1/8)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (7/32, 0, 7/32)^T$.

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - 1, & x \in [1, \infty) \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e si approssimi la soluzione in $x = 2$ mediante il seguente metodo

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h \left[f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{h}{4}, \eta_k + \frac{h}{4}f(x_k, \eta_k)\right) \right]$$

con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\eta_1 = -\frac{13}{8}, \eta_2 = -\frac{377}{64}$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x < 0 \\ 3x + 2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Soluzione

$$S_f(x) = \frac{7}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(k\pi)^2} ((-1)^k - 1) \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) - \frac{6}{k\pi} (-1)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

5. Risolvere ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale in \mathbb{R}

$$3y'' - 4y = H(x + 1) - H(x - 4).$$

Soluzione

$$y(x) = \begin{cases} \frac{e^{2/\sqrt{3}x}}{8} (e^{-8/\sqrt{3}} - e^{2/\sqrt{3}}), & x < -1, \\ \frac{1}{8} (e^{-2/\sqrt{3}(x+1)} + e^{2/\sqrt{3}(x-4)}) - \frac{1}{4}, & x \in [-1, 4], \\ -\frac{e^{-2/\sqrt{3}x}}{8} (e^{8/\sqrt{3}} - e^{-2/\sqrt{3}}), & x > 4. \end{cases}$$