Nome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata
14 novembre 2017

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore v_2 è ortogonale ai vettori v_1 e v_3 e si stabilisca se i tre vettori sono normalizzati rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞. Infine, si costruisca mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Soluzione. Il vettore v_2 è ortogonale al vettore v_3. I vettori dati sono unitari rispetto alla norma con indice ∞. I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

dove β e α sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro β che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1}.

Soluzione. $B \equiv A^{-1}$ se $\beta = 1/2$. C è non singolare per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. D è ortogonale se $\alpha = -1$, $\sigma(D) = \sigma(D^{-1}) = \{-1, 1, 1\}$, $\rho(D) = \rho(D^{-1}) = 1$.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2, 2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y' + \sqrt{2}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1, \\ 2 + x, & -1 \leq x < 0, \\ 2 - x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{5\sqrt{2}}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{16\sqrt{2}}{k^2\pi^2(8 + k^2\pi^2)} \left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) + \left(\frac{8}{k\pi(8 + k^2\pi^2)}\right) \left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3 + \mathrm{i}(k-2)}{9 + (k-2)^2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}k}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\sin 4x \cos 4x}{x\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}}\right\}.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})(x-3)}H(3 - x), \\ F(k) &= \frac{\pi}{2}\left[H(-k + 12) - H(-k - 4)\right]. \end{aligned}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{8}{3}y' - y = \delta(x - 3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{3}{10}\mathrm{e}^{3(x-3)} & x < 3, \\ -\frac{3}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x+1} & x \geq 3. \end{cases}$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

14 novembre 2017

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore v_1 è ortogonale ai vettori v_2 e v_3 e si stabilisca se i tre vettori sono normalizzati rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞. Infine, si costruisca mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Soluzione. Il vettore v_1 è ortogonale al vettore v_2. I vettori dati sono unitari rispetto alla norma con indice ∞. I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta \\ -\delta & 1 & 0 \\ -\delta & \delta & 0 \end{bmatrix}.$$

dove γ e δ sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro γ che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro δ che rendono C una matrice singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro δ la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi lo spettro e il raggio spettrale di D^{-1}.

Soluzione. $B \equiv A^{-1}$ se $\gamma = 2$. C è singolare se $\delta \in \{0, 1\}$. D è ortogonale se $\delta = -1$, $\sigma(D) = \sigma(D^{-1}) = \{1, -1, 1\}$, $\rho(D) = \rho(D^{-1}) = 1$.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y' + \sqrt{5}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ x, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Soluzione.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{5 + k^2\pi^2} \left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 2(-1)^k + \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right) \cos(k\pi x)$$
$$\frac{\sqrt{5}}{k\pi(5 + k^2\pi^2)} \left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 2(-1)^k + \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right) \sin(k\pi x)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{4 + \mathrm{i}(k-3)}{16 + (k-3)^2} \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}k} \right\}, \quad \mathcal{F}\left\{ \frac{\sin 3x \cos 3x}{x\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}} \right\}.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{(4+3\mathrm{i})(x-4)} H(4-x), \\ F(k) &= \frac{\pi}{2} \left[H(-k+9) - H(-k-3) \right]. \end{aligned}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{3}{2} y' - y = \delta(x-2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{2(x-2)} & x < 2, \\ -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} & x \geq 2. \end{cases}$$