Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

10 gennaio 2018

Compito numero 1

1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A e B una l'inversa dell'altra, i valori di γ che rendono C una matrice ortogonale. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ e si precisi il raggio spettrale di A. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

Soluzione. Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = 1$ e $\beta = -5/2$; C è ortogonale se $\gamma = \pm\sqrt{2}/2$; $\mathrm{cond}_1(A) = \mathrm{cond}_\infty(A) = \mathrm{cond}_1(B) = \mathrm{cond}_\infty(B) = 9/5$, $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(B) = \sqrt{5}/2$, $\mathrm{cond}_1(C) = \mathrm{cond}_\infty(C) = 2$, $\mathrm{cond}_2(C) = 1$; $\rho(A) = \sqrt{5}$; $\mathbf{x} = C^{-1}B^{-1}\mathbf{b} = C^T A\mathbf{b} = (-\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2})^T$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -12 \\ 12x_1 + 18x_2 + 9x_3 + 9x_4 = -3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 9x_4 = 17 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12^4 = -20736, \quad \mathbf{x} = [-1, 0, 2, -1]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 + \alpha x_3 = 1 \\ 2x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 4$. Il metodo di Jacobi converge se $-4 < \alpha < 4$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/4, -1/2, 3/4]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/8, -1/2, 5/8]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3xy - y', \quad x \in [\frac{2}{3}, 5] \\ y(\frac{2}{3}) = -1, y'(\frac{2}{3}) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{4}{3}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-1, -\frac{2}{3})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (-\frac{11}{9}, -\frac{13}{9})^T$.

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \dfrac{h}{(\alpha - 3)} \left[f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right]$,

(b) $\eta_{k+1} = (\gamma + 1)\eta_k - \gamma\eta_{k-1} + 2h(\gamma + 1)f(x_k, \eta_k)$.

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 6$ e $\beta = 3/8$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se $-1 \leq \gamma < 1$.

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

10 gennaio 2018

Compito numero 2

1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

   Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A e B una l'inversa dell'altra, i valori di γ che rendono C una matrice ortogonale. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ e si precisi se A e B sono definite positive. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

   Soluzione. Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = 1$ e $\beta = 3/2$; C è ortogonale se $\gamma = \pm\sqrt{2}/2$; $\text{cond}_1(A) = \text{cond}_2(A) = \text{cond}_\infty(A) = 3$; $\text{cond}_1(B) = \text{cond}_2(B) = \text{cond}_\infty(B) = 3$; $\text{cond}_1(C) = \text{cond}_\infty(C) = 2$, $\text{cond}_2(C) = 1$; la matrice A è definita positiva; $\mathbf{x} = C^{-1}B^{-1}\mathbf{b} = C^T A\mathbf{b} = (3\sqrt{2}, 2, 0)^T$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -12 \\ 12x_1 + 18x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 17 \end{cases}$$

   e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12^4 = -20736, \quad \mathbf{x} = [-2, 0, 2, -1]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3\beta x_1 + \beta x_3 = 1 \\ 3x_2 = -1 \\ \beta x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

dove β è un parametro reale. Si dica per quali valori di β la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Posto $\beta = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\beta \neq 0$ e $\beta \neq 9$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-9 < \beta < 9$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/6, -1/3, -1/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [5/18, -1/3, 4/9]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3xy - y', \quad x \in [\frac{2}{3}, 5] \\ y(\frac{2}{3}) = 0, y'(\frac{2}{3}) = -1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{4}{3}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (-\frac{5}{9}, -\frac{7}{9})^T$.

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

   (a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \dfrac{h}{(\alpha - 2)} \left[f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + 3\beta h, \eta_k + 3\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$

   (b) $\eta_{k+1} = (\delta - 1)\eta_k + \delta\eta_{k-1} + 2h(\delta + 1) f(x_k, \eta_k).$

   Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

   Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 5$ e $\beta = 1/4$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se $-1 < \delta \leq 1$.