

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

25 gennaio 2018

Compito numero 1

1. Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori di α e β che rendano M e U una l'inversa dell'altra e che rendano simmetrica la matrice $A = LM$. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli nel modo più conveniente l'inversa di A , il suo raggio spettrale e il suo indice di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ .

Soluzione. Le matrici M e U sono una l'inversa dell'altra se $\beta = -\frac{1}{8}$; A è simmetrica se $\alpha = 1$;

$$A^{-1} = M^{-1}L^{-1} = UU^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$\rho(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{2}; \quad \text{cond}_2(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{21-\sqrt{185}}, \quad \text{cond}_1(A) = \text{cond}_\infty(A) = \frac{25}{4}.$$

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la seconda e la terza colonna della sua inversa.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -4, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

$$(a) \quad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{3}\alpha h [f(x_k, \eta_k) + 5f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))],$$

$$(b) \quad \eta_{k+1} = (3\gamma + 2)\eta_k - (2\gamma^2 + 3\gamma + 1)\eta_{k-1} + \delta h f(x_{k-1}, \eta_{k-1}).$$

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/5$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se $-1 \leq \gamma < 0$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2, 2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x) + y(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0, \\ 2 + x, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Soluzione.

$$y(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1) + \frac{4(-1)^k}{4 + k^2\pi^2} \right) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) - \frac{8(-1)^k}{k\pi(4 + k^2\pi^2)} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'(x) - 4y(x) = e^{-3x}H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = -\frac{1}{7} (e^{-3x}H(x) - e^{4x}H(-x))$$

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

25 gennaio 2018

Compito numero 2

1. Si consideri il vettore $\mathbf{w} = [\alpha, 0, 1]^T$ dove α è un parametro reale. Si calcoli al variare del parametro α la norma ∞ di \mathbf{w} , e si dica qual'è quell'unico valore di α che rende \mathbf{w} un vettore unitario in norma 1 e 2. Si costruisca la matrice $A = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ e si dica per quali valori di α la matrice è singolare. Fissato il valore $\alpha = 2$ si determini lo spettro e raggio spettrale della matrice.

Soluzione.

$$\|\mathbf{w}\|_\infty = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 \leq \alpha \leq 1, \\ |\alpha|, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $\alpha = 0$ il vettore è unitario sia in norma 1 che in norma 2. A non è mai singolare. $\sigma(A) = \{1, 1, -9\}$ $\rho(A) = 9$.

2. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-\sqrt{\frac{8}{3}} < \alpha < \sqrt{\frac{8}{3}}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, -2/3, -1]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [11/9, -1/3, 1]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{3y'}{2x} - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 5] \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, y'(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{3}{4}, 2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{4}, 3)^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2, 2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x) + y(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0, \\ 2 + x, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Soluzione.

$$y(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1) + \frac{4(-1)^k}{4 + k^2\pi^2} \right) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) - \frac{8(-1)^k}{k\pi(4 + k^2\pi^2)} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i(k-2)}{9 + (k-2)^2} e^{-3ik} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{H(-x) \cos 3x}{e^{-4x}} \right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{2i(x-3)} (e^{-3(x-3)} H(x-3) - e^{3(x-3)} H(3-x))$$

$$F(k) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4 - i(k-3)} + \frac{1}{4 - i(k+3)} \right)$$