Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

22 marzo 2018

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [-8,\, 1,\, 6,\, -3]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/6 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -17/3 \\ 0 & 0 & 0 & 19/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -456, \quad x = [1,\, 1,\, -1,\, -1]\,.$$

2. Stabilire per quali dei seguenti valori di $\alpha = 1, -1, 2, -2$ il sistema lineare $Ax = b$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

è risolubile mediante il metodo iterativo di Jacobi. Per uno di tali valori, calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

Soluzione. Il metodo di Jacobi converge solo per $\alpha = 1$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [2, -1, 2/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [0, 0, 0]^T$.

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^2, \\ y(0) = 1, \quad x \in [0, 10], \end{cases}$$

si approssimi la soluzione nei punti $x = 1$ e $x = 2$ mediante il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, \eta_k + \frac{h}{2} f(x_k, \eta_k)\right)$$

con passo $h = 1$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = 3/4$, $\boldsymbol{\eta}_2 = 543/1024$.

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & -\pi \le x < 1 \\ 3, & 1 \le x < \pi \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$f(x) = \frac{-(\pi+1)^2 + 3(\pi-1)}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2(\cos k - (-1)^k)}{k^2\pi} - \frac{3\sin k}{k\pi} \right) \cos kx$$
$$+ \left(\frac{2\sin k}{k^2\pi} + \frac{3\cos k}{k\pi} - \frac{(-1)^k(5+2\pi)}{k\pi} \right) \sin kx.$$

La funzione f non è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$y' + 2\sqrt{3}y = H(x+\pi) - H(x-\pi), \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove H denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{3}(x+\pi)}\right), & -\pi \le x < \pi, \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}(x-\pi)} - \mathrm{e}^{-2\sqrt{3}(x+\pi)}\right), & x \ge \pi. \end{cases}$$