Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

12 giugno 2018

1. Si calcoli la fattorizzatione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [-4,\ -4,\ -8,\ -5]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 13/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 78, \quad x = [-1,\ -1,\ -1,\ -1]\,.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq 0, 3/2$. Il metodo di Jacobi converge se $-3/2 < \alpha < 3/2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [8, -4/3, 8/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [20/3, -8/9, 28/9]^T$.

3. Dire se il seguente problema di Cauchy è ben posto

$$\begin{cases} y' = -y^2 + 2, \\ y(0) = 1, \quad x \in [0, 10], \end{cases}$$

ed approssimarne la soluzione in $x = 3/2$ mediante il metodo di Eulero con passo $h = 1/2$.

Soluzione. Il problema ammette un'unica soluzione locale, in quanto la $f(x, y)$ è localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile; $\eta_1 = \dfrac{3}{2}$, $\eta_2 = \dfrac{11}{8}$, $\eta_3 = \dfrac{183}{128}$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$2y'' + y = 2x + 1.$$

Soluzione.

$$y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{k\pi(1 - 2k^2\pi^2)} \sin(k\pi x).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-2ik}}{k^2 + ik + 2}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{x\,\mathrm{e}^{-2ix}}{x^2 + 9}\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = -\frac{1}{3}\left[e^{2(x-2)}H(2-x) + e^{-(x-2)}H(x-2)\right]$$
$$F(k) = \pi i\left[e^{3(k+2)}H(-k-2) - e^{-3(k+2)}H(k+2)\right].$$