

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova scritta di Matematica Applicata**

13 luglio 2018

1. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di  $A$  e la soluzione del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = [1, 2, 3]^T$ .

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -4, \quad \mathbf{x} = [-3, 5, 0].$$

2. Si consideri il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Posto  $\alpha = 1$ , si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ . È possibile dire qual'è la soluzione del sistema senza fare ulteriori calcoli?

*Soluzione.*  $A$  è non singolare se  $\alpha \neq 0, 2$ . Il metodo di Jacobi converge se  $-2 < \alpha < 2$ . Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono  $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 1/2, 0]^T$  e  $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 1/2, 0]^T$ . Poiché il metodo è consistente, la soluzione è  $\mathbf{x} = [1, 1/2, 0]^T$ .

3. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

(a)  $\eta_{k+1} = \eta_k + 2\alpha h [3f(x_k, \eta_k) + f(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k))]$ ,

(b)  $\eta_{k+1} = \frac{2\gamma+1}{2}\eta_k - \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\eta_{k-1} + \delta h f(x_{k-1}, \eta_{k-1})$ .

Si determinino i valori dei parametri  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

*Soluzione.* Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se  $\alpha = 1/8$  e  $\beta = 1$ . Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se  $-2 \leq \gamma \leq 1$ .

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-1, 1]$

$$2y'' + y = |x|.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 1]}{k^2\pi^2(1 - 2k^2\pi^2)} \cos(k\pi x).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-\infty, \infty]$

$$2y'' - y = H(x + 3) - H(x - 4).$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4)} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+3)} \right), & x \leq -3, \\ \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+3)} + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4)} - 2 \right), & -3 < x \leq 4, \\ \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+3)} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4)} \right), & x > 4. \end{cases}$$