Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

16 gennaio 2019

1. Dati $a = 0.982$ e $b = 0.984$ e supponendo di operare in aritmetica floating point con tre cifre decimali di mantissa, calcolare il valore medio m dell'intervallo $[a, b]$ utilizzando la fromula convenzionale
$$m = \frac{a+b}{2}$$
e la formula
$$m = a + \frac{b-a}{2}.$$
Quale delle due formule fornisce il risultato giusto? Motivare opportunamente la risposta.

   Soluzione. La seconda formula fornisce il valore esatto $m = 0.983$. La formula convenzionale, invece, fornisce un valore che non è addiritura compreso nell'intervallo dato. In virtù, infatti, di un errore che si introduce per l'arrotondamento, questa fornisce come risultato $m = 0.985$.

2. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
e utilizzarla per calcolare il suo determinante e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [1\,0\,0\,1]^T$.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 5/6 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 10/9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = 10, \quad \mathbf{x} = [0, 0, 0, 1]^T.$$

3. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determinare i valori di β per i quali A è invertibile, i valori di β per i quali A è definita positiva e i valori di β per i quali il metodo di Jacobi è convergente se applicato al sistema $Ax = b$. Posto $\beta = 1/2$, calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel considerando il vettore iniziale $x^{(0)} = [0,\, 0,\, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è non singolare se $\beta \neq \pm 1$ ed è definita positiva se $-1 < \beta < 1$. Il metodo di Jacobi converge se $-1 < \beta < 1$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/2, 3/4, 5/16]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [5/16, 11/16, 21/64]^T$.

4. Determinare l'intervallo $\left[k, k + \frac{1}{2}\right]$ con k intero positivo che contenga la radice dell'equazione

$$-2\cos(x) + 1 - x = 0,$$

e calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo considerato. Si consideri poi l'equazione

$$(x + 1)(x - 2)^3 = 0$$

e si supponga che si voglia approssimare l'unica radice positiva con il metodo di Newton. Quale è il suo ordine di convergenza? Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione. Per quanto riguarda la prima equazione, la radice positiva è contenuta nell'intervallo $[2, 5/2]$ ($k = 2$). Le iterazioni del metodo di bisezione sono $c_0 = 9/4$, $c_1 = 17/8$ e $c_3 = 35/16$. Per quanto concerne la seconda equazione, la sua unica radice positiva $x = 2$ ha molteplicità algebrica pari a 3 e, quindi, il metodo di Newton ha ordine di convergenza pari a uno.

5. Scrivere nella forma di Lagrange il polinomio interpolante la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

nei punti di ascissa $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Si calcoli quindi l'errore relativo che si commette nell'approssimare la funzione con tale polinomio nel punto $x = 3/4$.

Soluzione. Il polinomio cercato deve interpolare i punti (1/2, 2), (1, 1) e (3/2, 2/3). Esso, quindi, ha la seguente forma

$$\mathcal{L}_m(f, x) = 2\ell_0(x) + \ell_1(x) + \frac{2}{3}\ell_2(x),$$

con

$$\ell_0(x) = 2(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right), \quad \ell_1(x) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right), \quad \ell_2(x) = 2\,(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

L'errore ralativo è $E(f, \frac{3}{4}) = \frac{|4/3 - 1/12|}{4/3} = 15/16$.