Nome, Cognome e matricola:...

Corso di studi: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
8 febbraio 2019

1. Si supponga di lavorare con un elaboratore che opera in aritmetica floating point con otto cifre decimali di mantissa e tecnica di arrotondamento. Dati i seguenti tre numeri di macchina

$$a = 0.23371258 \cdot 10^{-4}, \qquad b = 0.33678429 \cdot 10^{2}, \qquad c = -0.33677811 \cdot 10^{2}$$

calcolare le somme

$$x = a + (b + c), \qquad y = (a + b) + c$$

e confrontare i due risultati ottenuti con la somma esatta $z = a+b+c = 0.641371258 \cdot 10^{-3}$. Si spieghi quindi il diverso comportamento delle due somme e si calcolino gli errori relativi.

Soluzione. Dal calcolo degli errori relativi si osserva che mediante la somma $x = 0.64137126 \cdot 10^{-3}$ *otteniamo otto cifre significative mentre nella somma* $y = 0.641 \cdot 10^{-3}$ *ne abbiamo solo tre. Gli errori, infatti, sono*

$$e_1 = \frac{|z - x|}{|z|} = 0.312 \cdot 10^{-8}, \qquad e_2 = \frac{|z - x|}{|z|} = 0.579 \cdot 10^{-3}.$$

Questo diverso comportamento è dovuto al fenomeno della cancellazione numerica verificatasi quando si somma $a + b$ *(che è affetto da errore) al termine* c*.*

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A e la si utilizzi per calcolare la prima colonna dell'inversa di A. Si provi inoltre che Q è ortogonale e si risolva nel modo più conveniente il sistema $Qx = b$ con $b = [1,\ 0,\ 1]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = [-1, 1/2, 1]^T, \qquad x = Q^T b = [-1,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}].$$

3. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = b$. Si calcolino, inoltre, le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, considerando come vettore iniziale $x^{(0)} = [7/4,\ 7/4,\ -7/4]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile essendo det$(A) = 9 \neq 0$ e il metodo di Jacobi è convergente poichè $\rho(H_J) = \frac{1}{2} < 1$. Le iterate richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [9/8, 13/8, -5/8]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [19/16, 35/16, -15/16]^T$.

4. La seguente equazione nonlineare

$$3x^2 - e^x = 0$$

ammette due radici positive, la prima contenuta nell'intervallo $[1/2,\ 1]$, la seconda nell'intervallo $[3,\ 4]$. Si calcolino le prime due iterazioni del metodo di bisezione per approssimare la prima radice. Si applichi, inoltre, il metodo di Newton per approssimare la radice contenuta nel secondo intervallo calcolando solo la prima iterazione, prima con punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = 3$ e poi con punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = 4$. Alla luce dei risultati ottenuti, quale approssimazione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ è migliore? Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione. Le iterate richieste per il metodo di bisezione sono $c_0 = 3/4$, $c_1 = 7/8$ e $c_2 = 15/16$. Scegliendo come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = 3$ il metodo di Newton fornisce una prima iterata $\mathbf{x}^{(1)} = 6.3154$. Scegliendo, invece, come punto iniziale il secondo estremo dell'intervallo si ottiene $\mathbf{x}^{(1)} = 3.7844$. Alla luce dei risultati ottenuti, quindi, fissando $\mathbf{x}^{(0)} = 3$ otteniamo una iterata che non appartiene all'intervallo dato e pertanto non è una buona approssimazione iniziale. Ricordiamo del resto che il metodo di Newton è un metodo localmente convergente.

5. Scrivere nella forma di Lagrange il polinomio interpolante la seguente funzione

$$f(x) = 2^x + x^2 - 8,$$

nei punti di ascissa $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$. Si valuti quindi il polinomio nel punto $x = 0$.

Soluzione. Il polinomio cercato deve interpolare i punti $(-1,\ -13/2)$, $(1,\ -5)$, $(2,\ 0)$ e $(3, 9)$. Esso, quindi, ha la seguente forma

$$\mathcal{L}_m(f, x) = -\frac{13}{2}\ell_0(x) - 5\ell_1(x) + 9\ell_3(x),$$

con

$$\ell_0(x) = -\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3), \qquad \ell_1(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-3),$$

$$\ell_3(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2). \qquad \textit{Inoltre} \quad \mathcal{L}_m(f, 0) = -\frac{5}{8}.$$