

Nome, Cognome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

22 febbraio 2019

1. Si supponga di lavorare con un elaboratore che opera in aritmetica floating point con sei cifre decimali di mantissa e tecnica di arrotondamento. Dati i seguenti tre numeri di macchina

$$a = 68347.2 \cdot 10^{-1}, \quad b = 0.683949 \cdot 10^4, \quad c = 68.343861 \cdot 10^2,$$

calcolare le quantità

$$x = a - b, \quad y = a + c, \quad z = a - c,$$

e i corrispondenti errori relativi. Stabilire, quindi, in quale caso si è verificata la cancellazione numerica. Si motivi opportunamente la risposta.

Soluzione. Le quantità richieste risultano essere

$$x = -0.477 \cdot 10^1, \quad y = 0.136691 \cdot 10^5, \quad z = 0.33 \cdot 10^0,$$

e i corrispondenti errori relativi sono

$$e_x = 0, \quad e_y = 0.44 \cdot 10^{-6}, \quad e_z = 0.11 \cdot 10^{-1}.$$

Dal calcolo degli errori è evidente che la cancellazione numerica, ossia la perdita di cifre significative dovute alla sottrazione di due numeri "quasi uguali" si è verificata nel calcolo di z . Osserviamo, inoltre, che il numero di macchina c è l'unico affetto da errore dovuto all'arrotondamento.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 6 & -14 & 8 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -7 & \alpha & -3/2 \\ -13/3 & 7/6 & -5/6 \\ -7/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A e la si utilizzi per calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$. Infine si determini il parametro α che rende C matrice inversa di A e si calcoli il condizionamento in norma 1 della matrice A .

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/7 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & -14 & 8 \\ 0 & -14/3 & 26/3 \\ 0 & 0 & -3/7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 2$ la matrice C è inversa di A e $\text{cond}(A)_1 = 246$.

3. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro reale α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$. Posto $\alpha = 1$, inoltre, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel considerando come vettore iniziale $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$. Alla luce delle iterazioni calcolate, cosa si può dedurre sulla soluzione del sistema?

Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \neq 0$ e il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = 1$ le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = [1/6, 1, 1]^T$. Poichè queste coincidono, essendo il metodo consistente (in quanto convergente), possiamo dedurre che la soluzione del sistema lineare dato coincide con tali iterate.

4. Si consideri la seguente equazione non lineare

$$g(x) = x^6 - 64.$$

Si determini l'intervallo $[k + 1/2, k + 3/2]$ dove k è un intero positivo che contiene l'unica radice positiva dell'equazione data. Si calcolino quindi le prime due iterate del metodo di Newton, scegliendo come punto iniziale l'estremo destro dell'intervallo trovato. Si calcoli infine l'errore relativo sulla seconda iterata.

Soluzione. L'unica radice positiva dell'equazione data che risulta essere $x = 2$ è contenuta nell'intervallo $[3/2, 5/2]$ ($k = 1$). Applicando il metodo di Newton, si ottengono le seguenti iterate $x^{(1)} = \frac{1002}{457}$ e $x^{(2)} = \frac{1245}{611}$ con errore relativo sulla seconda iterata pari a $e_1 = 0.0185$.

5. Si scriva nella forma di Lagrange il polinomio interpolante la seguente funzione

$$f(x) = \sin(\pi x) + a \cos(\pi x), \quad a \in \mathbb{R}$$

nei punti di ascissa $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Calcolare, quindi, l'errore relativo nel punto $x = 1/2$ e determinare il valore di a affinché questo sia nullo.

Soluzione. Il polinomio cercato deve interpolare i punti $(-1, -a)$, $(0, a)$ e $(1, -a)$. Esso, quindi, ha la seguente forma

$$\mathcal{L}_m(f, x) = a(-\ell_0(x) + \ell_1(x) - \ell_2(x)),$$

con

$$\ell_0(x) = \frac{1}{2}x(x-1), \quad \ell_1(x) = -(x+1)(x-1), \quad \ell_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1).$$

L'errore relativo risulta essere pari a $e = |1 + \frac{a}{2}|$. Pertanto il valore $a = -2$ rende nullo tale errore.