Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
28 marzo 2019

1. Si supponga di lavorare con un elaboratore che opera in aritmetica floating point con sei cifre decimali di mantissa e tecnica di arrotondamento. Dati i seguenti tre numeri di macchina
$$a = 484.781 \cdot 10^1, \qquad b = 48.494871 \cdot 10^2, \qquad c = 0.484959 \cdot 10^4$$
calcolare le quantità
$$x = a - b, \qquad y = a + b, \qquad z = a - c,$$
e i corrispondenti errori relativi. Stabilire, quindi, in quali o in quale caso si è verificata la cancellazione numerica, motivando opportunamente la risposta.

   Soluzione. Le quantità richieste risultano essere
$$x = -0.168 \cdot 10^1, \qquad y = 0.969730 \cdot 10^4, \qquad z = -0.178 \cdot 10^1,$$
   e i corrispondenti errori relativi sono
$$e_x = 0.17 \cdot 10^{-2}, \qquad e_y = 0.30 \cdot 10^{-6}, \qquad e_z = 0.$$
   Dal calcolo degli errori è evidente che la cancellazione numerica, ossia la perdita di cifre significative dovute alla sottrazione di due numeri "quasi uguali" si è verificata nel calcolo di x. Osserviamo, inoltre, che il numero di macchina b è l'unico affetto da errore dovuto all'arrotondamento.

2. Si considerino le seguenti matrici
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A e la si utilizzi per calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$ e il determinante di A.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -5/26 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 26/3 & 1 \\ 0 & 0 & 26/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 31/13 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
$$det(A) = 124, \qquad x = [1, 0, 1, 0]^T$$

3. Assegnati
$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
determinare i valori di α per i quali A è invertibile, i valori di α per i quali A è definita positiva e i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel è convergente se applicato al sistema $Ax = b$. Posto $\alpha = 1$, calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel considerando il vettore iniziale $x^{(0)} = [0,\, 1,\, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$, è definita positiva se $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$ e il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni valore di $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$. Se $\alpha = 1$ le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/2,\, 1/4\,, 7/8]^T$,$\mathbf{x}^{(2)} = [7/8,\, -3/8\,, 19/16]^T$.

4. Determinare l' intervallo $[k, k+1]$ con $k > 0$ intero che contenga la radice positiva dell'equazione
$$2\sin(x) + 1 - x = 0,$$
e calcolare la prima iterata del metodo di Newton prima considerando come punto iniziale l'estremo destro dell'intervallo trovato e poi l'estremo sinistro. Si consideri poi l'equazione
$$(x+2)(x-3) = 0$$
e si supponga che si voglia approssimare l'unica radice positiva con il metodo di bisezione. Quale è il suo ordine di convergenza? Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione. Per quanto riguarda la prima equazione, la radice positiva è contenuta nell'intervallo $[2, 3]$ ($k = 2$). Considerando come punto iniziale l'estremo destro dell'intervallo, la prima iterata del metodo di Newton è $x^(1) = 2.4468$. Fissando, invece, $x^{(0)} = 3$ si ha una iterata pari a $x^(1) = 2.4236$. Per quanto concerne la seconda equazione, se si vuole approssimare la sua unica radice positiva $x = 3$ con il metodo di bisezione, si avrà un'ordine di convergenza pari a uno.

5. Scrivere nella forma di Lagrange il polinomio interpolante la seguente funzione
$$f(x) = \frac{1}{x+1},$$
nei punti di ascissa $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Si calcoli quindi l'errore relativo che si commette nell'approssimare la funzione con tale polinomio nel punto $x = 3/4$.
Soluzione. Il polinomio cercato deve interpolare i punti (0, 1), (1/2, 2/3) e (1, 1/2). Esso, quindi, ha la seguente forma
$$\mathcal{L}_m(f, x) = \ell_0(x) + \frac{2}{3}\ell_1(x) + \frac{1}{2}\ell_2(x),$$
con
$$\ell_0(x) = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \ell_1(x) = -4x\,(x-1)\,, \quad \ell_2(x) = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

L'errore ralativo è $E(f, \frac{3}{4}) = \frac{|4/7 - 9/16|}{4/7} = 1/64 \simeq 0.0156.$