Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
21 giugno 2019

1. Sia $a = 0.9876 \cdot 10^{-3}$. Calcolare la differenza $c = a - b$ in un sistema in virgola mobile in base 10 e con 4 cifre significative per i seguenti tre valori di b

$$0.1432 \cdot 10^{-5}, \qquad 0.9873 \cdot 10^{-3}, \qquad -0.1 \cdot 10^{-7}.$$

   Si calcoli l'errore relativo rispetto alla soluzione esatta per ciascuno dei tre valori ottenuti e si commentino i risultati.

   Soluzione. Se $b = 0.1432 \cdot 10^{-5}$ *allora* $c = 0.9862 \cdot 10^{-3}$ *con un errore relativo pari a* $0.33 \cdot 10^{-4}$. *Se* $b = 0.9873 \cdot 10^{-3}$ *allora* $c = 0.3 \cdot 10^{-6}$ *con errore ralativo pari a zero. Se* $b = -0.1 \cdot 10^{-7}$ *allora* $c = a$ *e si verifica l'effetto smearing (perdita di cifre che viene amplificata dall'operazione di cancellazione). L'errore relativo in questo caso è pari a* $0.10 \cdot 10^{-4}$.

2. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

   e la si utilizzi per calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right]^T$, il determinante di A e la prima colonna dell'inversa di A.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & -2/9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$det(A) = \frac{2}{27}, \qquad x = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]^T, \qquad A^{-1}\mathbf{e}_1 = \left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right]^T.$$

3. Sia α un parametro reale e si considerino le seguenti matrici

$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad A = B + B^T.$$

Si dica per quali valori di α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si studi, inoltre, al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi per approssimare la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [0, 1, 2]^T$ e, fissato $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate di tale metodo considerando come punto iniziale $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \neq 0$, è definita positiva se $\alpha > 0$ e il metodo di Jacobi converge per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = 1$ le iterazioni richieste sono $\mathbf{x^{(1)}} = [-1/4,\ 1/2\,, 1]^T$,$\mathbf{x^{(2)}} = [-1/8,\ 5/8\,, 1]^T$.

4. Determinare l'intervallo $[k,\ k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^4 - 5x^2 = 0.$$

Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Per entrambi i metodi, calcolare l'errore relativo sulla seconda iterata e dire qual'è l'ordine di convergenza, motivando la risposta.

Soluzione. L'unica radice positiva è contenuta nell'intervallo $[2, 3]$ ($k = 2$). Le iterate del metodo di bisezione(metodo del primo ordine) sono $x^{(1)} = \frac{9}{4}$ e $x^{(2)} = \frac{17}{8}$ con un errore relativo sulla seconda iterata pari $err = \frac{|\sqrt{5}-\frac{17}{8}|}{\sqrt{5}} = 0.0497$. Considerando come punto iniziale l'estremo destro dell'intervallo, le iterate del metodo di Newton (metodo del secondo ordine) sono $x^(1) = \frac{33}{13}$ e $x^{(2)} = \frac{3985}{1728}$ con un errore sulla seconda iterata pari a $err = \frac{|\sqrt{5}-\frac{3985}{1728}|}{\sqrt{5}} = 0.0313$.

5. Esprimere il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	0	1	2
y_i	-5	0	3	4

nella forma di Lagrange e calcolarne il valore nel punto $x = -1$.

Soluzione. Il polinomio cercato ha la seguente forma

$$\mathcal{L}_m(x) = -5\ell_0(x) + 3\ell_2(x) + 4\ell_3(x),$$

con

$$\ell_0(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2), \quad \ell_2(x) = -\frac{1}{2}x(x+1)(x-2), \quad \ell_3(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x+1).$$

Come è evidente dalla traccia, senza fare calcoli, si può dedurre che il valore del polinomio in $x = -1$ è $\mathcal{L}_m(-1) = -5$.