Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

12 luglio 2019

1. Si supponga di lavorare con un elaboratore che opera in aritmetica floating point con cinque cifre decimali di mantissa e tecnica di arrotondamento. Dati i seguenti tre numeri di macchina
$$a = 72.213, \qquad b = 41.243, \qquad c = -113.44$$
calcolare le somme
$$x = a + (b + c), \qquad y = (a + b) + c$$
e i corrispondenti gli errori relativi. Si commentino quindi i risultati ottenuti.

   Soluzione. Le somme risultano essere pari a: $x = 0.016$ *e* $y = 0.02$*. Nel primo caso si ha un eroore relativo pari a zero mentre nella seconda somma si ha un errore relativo pari a* 0.25*. Questo diverso comportamento è dovuto al fenomeno della cancellazione numerica verificatasi quando si somma* $a + b$ *(che è affetto da errore) al termine* c*.*

2. Sia A la matrice dei coefficienti del seguente sistema
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases} .$$
Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare dato e calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice A.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$x = (4, 5, 3, 7)^T, \qquad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (-2, -3, -1, -4)^T.$$

3. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si studi, inoltre, al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel per approssimare la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [1, 2, 3]^T$ e, fissato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate di tale metodo considerando come punto iniziale $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \neq 0, \pm 1$, è definita positiva se $\alpha > 1$ e il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha < -1$ oppure $\alpha > 1$. Se $\alpha = 2$ le iterazioni richieste sono $\mathbf{x^{(1)}} = [-1/2,\ 1\ , 3/4]^T$,$\mathbf{x^{(2)}} = [-7/8,\ 1\ , 15/16]^T$.

4. Determinare l'intervallo $[k,\ k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^2 - \frac{2}{x} = 0$$

Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato. Per entrambi i metodi, calcolare l'errore relativo sulla seconda iterata e dire qual'è l'ordine di convergenza, motivando la risposta.

Soluzione. L'unica radice positiva è contenuta nell'intervallo $[1, 2]$ ($k = 1$). Le iterate del metodo di bisezione(metodo del primo ordine) sono $x^{(1)} = \frac{5}{4}$ e $x^{(2)} = \frac{11}{8}$ con un errore relativo sulla seconda iterata pari a $err = \frac{|2^{1/3} - \frac{11}{8}|}{2^{1/3}} = 0.0913$. Considerando come punto iniziale l'estremo sinistro dell'intervallo, le iterate del metodo di Newton (metodo del secondo ordine) sono $x^{(1)} = \frac{5}{4}$ e $x^{(2)} = \frac{635}{504}$ con un errore sulla seconda iterata pari a $err = \frac{|2^{1/3} - \frac{635}{504}|}{2^{1/3}} = 3.29 \cdot 10^{-7}$.

5. Esprimere il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	$-1/2$	1	2
y_i	0	1	2	-8

nella forma di Lagrange e calcolarne il valore nel punto $x = 0$.

Soluzione. Il polinomio cercato ha la seguente forma

$$\mathcal{L}_m(x) = \ell_1(x) + 2\ell_2(x) - 8\ell_3(x),$$

con

$$\ell_1(x) = \frac{8}{15}(x+1)(x-1)(x-2), \qquad \ell_2(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x+1/2)(x-2),$$
$$\ell_3(x) = \frac{2}{15}(x+1)(x+1/2)(x-1).$$

Pertanto, il valore del polinomio in $x = 0$ è $\mathcal{L}_m(0) = \frac{34}{15}$.