

Nome, Cognome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

29 agosto 2019

1. Dati $a = 0.762$ e $b = 0.764$ e supponendo di operare in aritmetica floating point con tre cifre decimali di mantissa, calcolare il valore medio dell'intervallo $[a, b]$ utilizzando le formule

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad m_1 = a + \frac{b-a}{2}.$$

Quale delle due formule fornisce il risultato giusto? Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione. La seconda formula fornisce il valore esatto $m_1 = 0.763$. La formula convenzionale, invece, fornisce un valore che non è addirittura compreso nell'intervallo dato. In virtù, infatti, di un errore che si introduce per l'arrotondamento, questa fornisce come risultato $m = 0.765$.

2. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A e la si utilizzi per calcolare il determinante di A , la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [1, -1, 1]$ e la prima colonna dell'inversa di A .

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = -2, \quad x = [-2, -1, 5]^T \quad A^{-1}\mathbf{e}_1 = [-1, 0, 2]^T.$$

3. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = b$. Si calcolino, inoltre, le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, considerando come vettore iniziale $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile essendo $\det(A) = 27 \neq 0$ e il metodo di Jacobi è convergente poichè $\rho(H_J) = 0 < 1$. Le iterate richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [4/3, 5/3, -1]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [4/3, 4/3, -5/9]^T$.

4. Determinare l'intervallo $[k, k + 1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3x - 1 = 0$$

Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato. Per entrambi i metodi, dire qual'è l'ordine di convergenza, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. L'unica radice positiva è contenuta nell'intervallo $[0, 1]$ ($k = 0$). Le iterate del metodo di bisezione (metodo del primo ordine) sono $x^{(1)} = \frac{1}{4}$ e $x^{(2)} = \frac{1}{8}$. Considerando come punto iniziale l'estremo sinistro dell'intervallo, le iterate del metodo di Newton (metodo del secondo ordine) sono $x^{(1)} = \frac{2}{6+\pi}$ e $x^{(2)} = \frac{391}{1775}$.

5. Esprimere il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	2	-8

nella forma di Lagrange e calcolarne il valore nel punto $x = 1/2$.

Soluzione. Il polinomio cercato ha la seguente forma

$$\mathcal{L}_m(x) = \ell_1(x) + 2\ell_2(x) - 8\ell_3(x),$$

con

$$\begin{aligned}\ell_1(x) &= \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2), & \ell_2(x) &= -\frac{1}{2}x(x+1)(x-2), \\ \ell_3(x) &= \frac{1}{6}x(x+1)(x-1).\end{aligned}$$

Pertanto, il valore del polinomio in $x = 1/2$ è $\mathcal{L}_m(1/2) = \frac{35}{16}$.