Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

13 settembre 2019

1. Si supponga di lavorare con un elaboratore che opera in aritmetica floating point con tre cifre decimali di mantissa e tecnica di arrotondamento. Dati i seguenti tre numeri di macchina

$$a = 0.123, \qquad b = 0.134 \cdot 10^{-1}, \qquad c = 0.143 \cdot 10^{-1}$$

calcolare le somme

$$x = a + (b + c), \qquad y = (a + b) + c$$

e confrontare i due risultati ottenuti con la somma esatta. Si spieghi quindi il diverso comportamento delle due somme e si calcolino gli errori relativi.

Soluzione. Le somme sono pari a $x = 0.151$ *e* $y = 0.150$ *con errori relativi pari a* $e_x = 0.0020$ *e* $e_y = 0.0046$.

2. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e utilizzarla per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [1, 0, 1, 1]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$det(A) = -8, \qquad x = [0,\ 1/4,\ 1/2,\ 1/4].$$

3. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$. Si calcolino, inoltre, le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, considerando come vettore iniziale $x^{(0)} = [1,\, 0,\, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile essendo $det(A) = -85 \neq 0$ e il metodo di Gauss-Seidel è convergente poichè $\rho(H_J) = \frac{5}{12} < 1$. Le iterate richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [3/4, -7/4, -2/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [91/48, -59/24, -1/24]^T$.

4. Determinare l'intervallo $[k,\, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} x^3 + x^2 - 1 = 0$$

Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e la prima iterazione del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Si consideri, inoltre, la seguente equazione non lineare

$$(x+1)(x-\sqrt{\pi})^2 = 0.$$

Quale è l'ordine di convergenza del metodo di bisezione e del metodo di Newton per approssimare l'unica radice positiva dell'equazione considerata? Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione. L'unica radice positiva è contenuta nell'intervallo $[0,1]$ ($k=0$). Le iterate richieste per il metodo di bisezione sono $c_0 = 3/4$, $c_1 = 7/8$ e $c_2 = 13/16$. Scegliendo come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = 1$ il metodo di Newton fornisce una prima iterata pari a $\mathbf{x}^{(1)} = \frac{2+3\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{3})}$. L'equazione $(x+1)(x-\sqrt{\pi})^2 = 0$ ammette come unica radice $x = \sqrt{\pi}$ avente molteplicità algebrica pari a 2. Pertanto, entrambi i metodi hanno ordine di convergenza pari a uno.

5. Scrivere nella forma di Lagrange il polinomio interpolante la seguente funzione

$$f(x) = 2^x - 3x + 2,$$

nei punti di ascissa $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Si valuti quindi il polinomio nel punto $x = 1/2$.

Soluzione. Il polinomio cercato deve interpolare i punti $(0,\, 3)$, $(1,\, 1)$, $(2,\, 0)$ e $(3, 1)$. Esso, quindi, ha la seguente forma

$$\mathcal{L}_m(f,x) = 3\ell_0(x) + \ell_1(x) + \ell_3(x),$$

con

$$\ell_0(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3), \qquad \ell_1(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3),$$
$$\ell_3(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2).$$

Inoltre $\mathcal{L}_m(f, 1/2) = \frac{31}{16}$.