Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

10 gennaio 2019

Compito numero 1

1. Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -2\beta & 1/2 & \beta \\ 2\beta & 0 & 4\beta \end{bmatrix}$$

   dove α e β sono parametri reali. Si dica, senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, per quali valori di α la matrice L è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si determini il valori di β che rende B la matrice inversa di A, si calcoli l'indice di condizionamento in norma 1 e ∞ di A e il raggio spettrale della matrice A (si tenga conto che uno degli autovalori di A è 2). Infine, nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $L^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

   Soluzione. La matrice L è invertibile per $\alpha \neq 0$ ed ha autovalori positivi per $\alpha > 0$. Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\beta = 1/10$; $\text{cond}_\infty(A) = 7$, $\text{cond}_1(A) = 5$, $\rho(A) = \sqrt{5}$. La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = (1, 1, -1)^T$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

   e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 5, \quad \mathbf{x} = [0, 2, -1, 1]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + \beta x_2 = 2 \\ \beta x_1 + 2x_2 + \beta x_3 = 3 \\ \beta x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

dove β è un parametro reale. Si dica per quali valori di β la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\beta \neq \sqrt{6}/2$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-\sqrt{6}/2 < \beta < \sqrt{6}/2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 1, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 1, 0]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 4xy' - y, \quad x \in [1, 4] \\ y(1) = -2, y'(1) = 4 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{5}{3}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-\frac{2}{3},\, 10)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{8}{3}, 28)^T$.

5. Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

$$\begin{aligned} (a) \qquad & \eta_{k+1} = (1 - 2\delta)\eta_k + 2\delta\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k), \\ (b) \qquad & \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\beta h}{3}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + 2\alpha\beta h, \eta_k + 2\alpha\beta hf(x_k, \eta_k)\right)\right] \end{aligned}$$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

Soluzione. Lo schema (a) è multistep esplicito ed è stabile per $-\frac{1}{2} < \delta \leq \frac{1}{2}$. Lo schema (b) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = \frac{25}{24}$ e $\beta = \frac{3}{5}$.

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

10 gennaio 2019

Compito numero 2

1. Si considerino le matrici

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & \gamma & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4\delta & 0 & 2\delta \\ \delta & 1/2 & -2\delta \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

dove γ e δ sono parametri reali. Si dica, senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, per quali valori di γ la matrice U è invertibile e per quali i suoi autovalori sono tutti positivi. Si determini il valore di δ che rende B la matrice inversa di A, si calcoli l'indice di condizionamento in norma 1 e ∞ di A e il raggio spettrale della matrice A (si tenga conto che uno degli autovalori di A è 2). Infine, nel caso $\gamma = \frac{1}{3}$ si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $U^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = (1,1,1)^T$.

Soluzione. La matrice U è invertibile per $\gamma \neq 0$ ed ha autovalori positivi per $\gamma > 0$. Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\beta = 1/10$; $\text{cond}_\infty(A) = 7$, $\text{cond}_1(A) = 5$, $\rho(A) = \sqrt{5}$. La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = (-5/4, 13, 1)^T$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 80, \quad \mathbf{x} = [0, 2, 1, -1]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + \beta x_2 = 2 \\ \beta x_1 + 2x_2 - \beta x_3 = 3 \\ -\beta x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

dove β è un parametro reale. Si dica per quali valori di β la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\beta \neq \sqrt{6}/2$. Il metodo di Jacobi converge se $-\sqrt{6}/2 < \beta < \sqrt{6}/2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 1, 2/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 4/3, 7/9]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3xy' - y, \quad x \in [1, 4] \\ y(1) = -2, y'(1) = 3 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-\frac{5}{4}, \frac{23}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{3}{16}, \frac{733}{64})^T$.

5. Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

$$(a) \qquad \eta_{k+1} = (1 - 3\gamma)\eta_k + 3\gamma\eta_{k-1} + 3hf(x_k, \eta_k),$$

$$(b) \qquad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\beta h}{2}\left[2f(x_k, \eta_k) + 3f\left(x_k + 3\alpha\beta h, \eta_k + 3\alpha\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

Soluzione. Lo schema (a) è multistep esplicito ed è stabile per $-\frac{1}{3} < \delta \leq \frac{1}{3}$. Lo schema (b) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = \frac{25}{18}$ e $\beta = \frac{2}{5}$.