Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata

29 gennaio 2019

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/4 & \beta & 1/4 \\ \beta & 1 & \beta \\ 1/4 & \beta & 3/4 \end{bmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori di α per cui la matrice A è non singolare e per quali è definita positiva. Fissato $\alpha = 1$, si determinino i valori di β che rendono B inversa di A, e si calcoli il numero di condizionamento di A in norma 1, ∞ e 2. Infine, dopo avere verificato che Q è ortogonale, si risolva nel modo più conveniente il sistema $Qx = b$ dove b è il vettore unitario.

Soluzione. La matrice è non singolare per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}/2\}$ ed è definita positiva se $\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$. La matrice B è l'inversa di A se $\beta = 1/2$,

$$cond(A)_1 = cond(A)_\infty = 8, \qquad cond(A)_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, \qquad x = [1/3,\, 5/3,\, -1/3]^T.$$

2. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante di A e la terza colonna dell' inversa di A.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 10/3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -10, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = [-3/10,\, -3/5,\, 1/10,\, 3/10]^T.$$

3. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2\alpha & 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

deteminare per quali valore del parametro α la matrice A è invertibile e per quali il metodo di Jacobi risulta convergente. Fissato, inoltre, $\alpha = 1$, si eseguano le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$ con $b = [3\,3\,4\,2]^T$ considerando il vettore iniziale $x^{(0)} = [0\,0\,0\,0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 2\}$. Il metodo di Jacobi converge se $-2 < \alpha < 2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [3/2,\ 3/2,\ 1/2,\ 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [5/4,\ 5/4,\ 3/4,\ 3/4]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{x+1}, & x \in [1,4] \\ y(1) = 0, y'(1) = 1/2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/8,\ 9/16)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (17/64, 5/8)^T$.

5. Si classifichi e si studi la stabilità, la consistenza e la convergenza del seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{5}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{5}{4}h, \eta_k + \frac{5}{4}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Si classifichi e si studi, inoltre, al variare del parametro reale δ la stabilità del seguente schema numerico

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2}(\delta + 1)\eta_k - \frac{\delta}{4}\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k).$$

Soluzione. Il primo schema è di tipo monostep esplicito ed è stabile, consistente del secondo ordine e quindi convergente del seguente ordine. Il secondo schema è di tipo multistep esplicito ed è stabile per $-2 \leq \delta \leq 2$.