Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

10 gennaio 2019

1. Si considerino le matrici

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & \gamma & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4\delta & 0 & 2\delta \\ \delta & 1/2 & -2\delta \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

dove γ e δ sono parametri reali. Si dica, senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, per quali valori di γ la matrice U è invertibile e per quali i suoi autovalori sono tutti positivi. Si determini il valore di δ che rende B la matrice inversa di A, si calcoli l'indice di condizionamento in norma 1 e ∞ di A e il raggio spettrale della matrice A (si tenga conto che uno degli autovalori di A è 2). Infine, nel caso $\gamma = \frac{1}{3}$ si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $U^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

Soluzione. La matrice U è invertibile per $\gamma \neq 0$ ed ha autovalori positivi per $\gamma > 0$. Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\beta = 1/10$; $\mathrm{cond}_\infty(A) = 7$, $\mathrm{cond}_1(A) = 5$, $\rho(A) = \sqrt{5}$. La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = (-5/4, 13, 1)^T$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 5, \quad \mathbf{x} = [0, 2, -1, 1]^T.$$

3. Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

$$(a) \qquad \eta_{k+1} = (1 - 2\delta)\eta_k + 2\delta\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k),$$

$$(b) \qquad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\beta h}{3}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + 2\alpha\beta h, \eta_k + 2\alpha\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right]$$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

Soluzione. Lo schema (a) è multistep esplicito ed è stabile per $-\frac{1}{2} < \delta \leq \frac{1}{2}$. Lo schema (b) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = \frac{25}{24}$ e $\beta = \frac{3}{5}$.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}(k-1)}{2+\mathrm{i}(k-1)}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{e^{-x}H(x-3) * \frac{x}{2x^2+5}\right\}$$

Soluzione.

$$f(x) = -2\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-2)x}H(x), \qquad F(k) = \left(\frac{\mathrm{e}^{-3(1+\mathrm{i}k)}}{1+\mathrm{i}k}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{k\sqrt{5/2}}H(-k) - \mathrm{e}^{-k\sqrt{5/2}}H(k)\right]\right).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$\sqrt{5}y' + y = H(x+5) - H(x+3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -5, \\ \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{5}}{5}(x+5)}\right), & -5 \leq x < -3, \\ \left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{5}}{5}(x+3)} - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{5}}{5}(x+5)}\right), & x \geq -3. \end{cases}$$