Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
13 febbraio 2019

1. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -8 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$$

   Si calcoli, inoltre, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema mediante la fattorizzazione $PA = LU$.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -5/8 & 7/10 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & 0 & 23/10 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -23, \quad \mathbf{x} = [2, -3, 1, -1]^T.$$

2. Siano

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si dica per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$. Si calcolino, inoltre, le prime tre iterazioni del metodo di Jacobi considerando come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1,\ 1,\ 1]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni valore di α. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-2/\alpha, -1/3, 1]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [-2/(3\alpha), -1/3, 1]^T$. Poiché $\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)}$, questa è anche la soluzione del sistema.

3. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e si studi stabilità, consistenza e convergenza

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{3h}{4}\left[f(x_k, \eta_k) + \frac{1}{3} f\left(x_k + \frac{2}{3}h, \eta_k + \frac{2}{3}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Considerato poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y - x, \quad x \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

si calcoli la soluzione approssimata nel punto $x = 1$ mediante il metodo alle differenze introdotto in precedenza, nel caso in cui $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Lo schema è monostep esplicito, e in quanto tale è stabile. Risulta essere consistente, e quindi convergente, del primo ordine. Le prime due iterate del metodo sono $\eta_1 = 17/8$ e $\eta_2 = 205/48$.

4. Si calcoli la serie di Fourier della funzione $f(x) = 2x + 5$ nell'intervallo $[-2, 2]$ e si dica se questa è differenziabile termine a termine.

   Soluzione La serie di Fourier è la seguente

$$S_f(x) = 5 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

   La serie non è differenziabile termine a termine perché $f(-2) \neq f(2)$.

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2x^2+5}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\delta(x+3) * \mathrm{e}^{-|x|}\cos 5x\right\},$$

   dove il simbolo $*$ indica la convoluzione nel senso di Fourier e $H(x)$ è la funzione di Heaviside.

   Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{10}}{10}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{5}{2}}|k+1|}$$
$$f(x) = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}\left[\frac{1}{1+(k-5)^2} + \frac{1}{1+(k+5)^2}\right].$$