Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

29 marzo 2019

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A e la si utilizzi per calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$ e il determinante di A.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -5/26 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 26/3 & 1 \\ 0 & 0 & 26/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 31/13 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = 124, \qquad x = [1,\, 0,\, 1,\, 0]^T$$

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

determinare i valori di α per i quali A è invertibile, i valori di α per i quali A è definita positiva e i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel è convergente se applicato al sistema $Ax = b$. Posto $\alpha = 1$, calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel considerando il vettore iniziale $x^{(0)} = [0,\, 1,\, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$, è definita positiva se $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$ e il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni valore di $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$. Se $\alpha = 1$ le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(\mathbf{1})} = [1/2,\, 1/4\,, 7/8]^T$,$\mathbf{x}^{(\mathbf{2})} = [7/8,\, -3/8\,, 19/16]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy' - 3y \quad x \in [-2, 2] \\ y(-1) = \frac{1}{2}, y'(-1) = 1 \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = 0$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -1/4)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (7/8, -27/16)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+1), & x \in [-3,-2), \\ 0, & x \in [-2,3], \end{cases} .$$

Soluzione La serie di Fourier è la seguente

$$S_f(x) = -\frac{3}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3}{k\pi} \sin\frac{2k\pi}{3} + \frac{9}{k^2\pi^2} \left(\cos\frac{2k\pi}{3} - (-1)^k \right) \right] \cos\left(\frac{k\pi}{3}x\right)$$
$$+ \left[\frac{3}{k\pi} \left(\cos\frac{2k\pi}{3} - 2(-1)^k \right) - \frac{9}{k^2\pi^2} \sin\frac{2k\pi}{3} \right] \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{2x\mathrm{e}^{-x}H(x-2)\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}k}\sin 3(k+1)}{(k+1)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{2\mathrm{e}^{-2(1+\mathrm{i}k)}(3+2\mathrm{i}k)}{(1+\mathrm{i}k)^2},$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+5)}\left[H(x+8) - H(x+2)\right].$$