Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

8 novembre 2019

1. Sia A la matrice dei coefficienti del seguente sistema

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}.$$

Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare dato e calcolare il determinante della matrice A.

Soluzione

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$x = (0, 1, -1, 0)^T, \qquad det(A) = 24.$$

2. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di α la matrice A è invertibile e per quali valori il metodo iterativo di Jacobi risulta essere convergente se applicato al sistema $Ax = b$ con $b = [1, 2, 3]^T$. Fissato $\alpha = 1/2$, si calcolino le prime due iterate di tale metodo considerando come punto iniziale $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \neq \pm\sqrt{\frac{8}{5}}$ *e il metodo di Jacobi converge se* $-\sqrt{\frac{8}{5}} < \alpha < \sqrt{\frac{8}{5}}$. *Se* $\alpha = 1/2$ *le iterazioni richieste sono* $\mathbf{x^{(1)}} = [1/8,\ 1\,,5/2]^T$,$\mathbf{x^{(2)}} = [1/8,\ 11/32,\ 5/2]^T$.

3. Classificare il seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \alpha h \left[f(x_i, \eta_i) + f(x_i + \frac{\beta}{2} h, \eta_i + \frac{\beta}{2} h f(x_i, \eta_i)) \right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e discuterne la convergenza al variare dei parametri reali α e β.

Soluzione. Si tratta di una formula monostep esplicita a 2 stadi. Il metodo è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = 1/2$; è del second'ordine per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 2$.

4. Risolvere, ricorrendo alle serie di Fourier, l'equazione differenziale

$$y'' + \sqrt{5} y' + y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 \leq x \leq 1, \\ f(x+2) = f(x). \end{cases}$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi x),$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2 (1 + k^2 \pi^2)} \cos(k\pi x) + \frac{1 - (-1)^k}{k\pi (1 + k^2 \pi^2)} \sin(k\pi x).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' + 3y = H(x+3) - H(x-1), \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove $H(x)$ indica la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3, \\ \frac{1}{3} \left(1 - \mathrm{e}^{-3(x+3)} \right) & -3 < x \leq 1, \\ \frac{1}{3} \left(\mathrm{e}^{3} - \mathrm{e}^{-9} \right) e^{-3x} & x > 1. \end{cases}$$