

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prima prova intermedia di Matematica Applicata

5 novembre 2019

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore  $\mathbf{v}_1$  è ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_2$  e si calcoli la norma  $\infty$ , norma 1 e norma 2 del vettore  $\mathbf{v}_3$ . Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$  a partire dai vettori dati. Si calcoli la matrice  $A = \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2^T$  e si dica quanto vale il suo determinante.

*Soluzione.* Il vettore  $\mathbf{v}_1$  non è ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_2$ ,

$$\|\mathbf{v}_3\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{v}_3\|_1 = 6, \quad \|\mathbf{v}_3\|_2 = \sqrt{10}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di  $A$  è nullo perché la matrice ha rango 1.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2\beta & -1 & \beta \\ -1 & 1 & -1 \\ \beta & -1 & 2\beta \end{bmatrix},$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri reali. Determinare i valori di  $\alpha$  che rendono invertibile la matrice  $A$  e, fissato  $\alpha = 1$ , i valori di  $\beta$  che rendono  $B$  l'inversa di  $A$ . Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di  $A$  e il raggio spettrale di  $A$ ,  $B$  e  $A^3$ . Si calcoli infine la norma  $\infty$  del vettore  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ , dove  $\mathbf{x} = (2, i, 1 + i)^T$ .

*Soluzione.* La matrice  $A$  è non singolare per  $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{6}/3$ ;  $B$  è l'inversa di  $A$  per  $\beta = 1$ ;  $\sigma(A) = \{1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$ ,  $\rho(A) = 2 + \sqrt{3}$ ,  $\rho(B) = \rho(A^{-1}) = 1/(2 - \sqrt{3})$ ,  $\rho(A^3) = \rho(A)^3 = (2 + \sqrt{3})^3$ ;  $\mathbf{y} = (2 + i, 3 + 4i, 1 + 2i)^T$ ,  $\|\mathbf{y}\|_\infty = 5$ .

3. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 \leq x < -1/2, \\ \cos(\pi x) + 1 & -1/2 \leq x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \leq x \leq \pi/2, \end{cases}$$

e dire se  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.* La funzione data è differenziabile termine a termine e la sua serie di Fourier è

$$S_f(x) = \left(\frac{2}{\pi^2} + 1\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cos(k)}{\pi^2 - 4k^2} \cos(2kx).$$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, le seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 5y = f(x), \quad y' + 5y = f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

essendo  $f(x)$  la funzione dell'esercizio precedente.

*Soluzione.* La soluzione della prima equazione differenziale è

$$S_y(x) = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cos(k)}{(\pi^2 - 4k^2)(5 - 4k^2)} \cos(2kx).$$

La soluzione della seconda equazione differenziale è

$$S_y(x) = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cos(k)}{(\pi^2 - 4k^2)(25 + 4k^2)} (5 \cos(2kx) + 2k \sin(2kx)).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\cos(7x)}{5 + i(x+1)} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i(k+3)e^{5ik}}{k^2 + 6k + 12} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = \pi \left[ e^{(5+i)(k-7)} H(7-k) + e^{(5+i)(k+7)} H(-7-k) \right],$$

$$f(x) = \frac{e^{-3i(x+5)}}{2} \left[ e^{\sqrt{3}(x+5)} H(-x-5) - e^{-\sqrt{3}(x+5)} H(x+5) \right].$$

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prima prova intermedia di Matematica Applicata

5 novembre 2019

#### Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore  $\mathbf{v}_1$  è ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_2$  e si calcoli la norma  $\infty$ , norma 1 e norma 2 del vettore  $\mathbf{v}_3$ . Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$  a partire dai vettori dati. Si calcoli la matrice  $A = \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2^T$  e si dica quanto vale il suo determinante.

*Soluzione.* Il vettore  $\mathbf{v}_1$  non è ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_2$ ,

$$\|\mathbf{v}_3\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{v}_3\|_1 = 4, \quad \|\mathbf{v}_3\|_2 = 2.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di  $A$  è nullo perché la matrice ha rango 1.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3\beta & -1/2 & \beta \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ \beta & -1/2 & 3\beta \end{bmatrix},$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri reali. Determinare i valori di  $\alpha$  che rendono invertibile la matrice  $A$  e, fissato  $\alpha = 1$ , i valori di  $\beta$  che rendono  $B$  l'inversa di  $A$ . Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di  $A$  e il raggio spettrale di  $A$ ,  $B$  e  $A^3$ . Si calcoli infine la norma  $\infty$  del vettore  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ , dove  $\mathbf{x} = (2, i, 1 + i)^T$ .

*Soluzione.* La matrice  $A$  è non singolare per  $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2}/2$ ;  $B$  è l'inversa di  $A$  per  $\beta = 1/4$ ;  $\sigma(A) = \{2, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$ ,  $\rho(A) = 2 + \sqrt{2}$ ,  $\rho(B) = \rho(A^{-1}) = 1/(2 - \sqrt{2})$ ,  $\rho(A^3) = \rho(A)^3 = (2 + \sqrt{2})^3$ ;  $\mathbf{y} = (4 + i, 3 + 3i, 2 + 3i)^T$ ,  $\|\mathbf{y}\|_\infty = \sqrt{18}$ .

3. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & -\pi/2 \leq x < -1/2, \\ \sin(\pi x) & -1/2 \leq x < 1/2, \\ 1/2, & 1/2 \leq x \leq \pi/2, \end{cases}$$

e dire se  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.* La funzione data non è differenziabile termine a termine e la sua serie di Fourier risulta essere

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \cos(k) \left( \frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \right) \sin(2kx).$$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, le seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 5y = f(x), \quad y' + 5y = f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

essendo  $f(x)$  la funzione dell'esercizio precedente.

*Soluzione.* La soluzione della prima equazione differenziale è

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(5 - 4k^2)} \left( \cos(k) \left( \frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \right) \sin(2kx).$$

La soluzione della seconda equazione differenziale è

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(25 + 4k^2)} \left( \cos(k) \left( \frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \right) (-2k \cos(2kx) + 5 \sin(2kx)).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(3x)}{\pi + i(x+4)} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i(k+2)e^{3ik}}{k^2 + 4k + 12} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = \frac{\pi}{i} \left[ e^{(\pi+4i)(k-3)} H(3-k) - e^{(\pi+4i)(k+3)} H(-3-k) \right],$$

$$f(x) = \frac{e^{-2i(x+3)}}{2} \left[ e^{\sqrt{8}(x+3)} H(-x-3) - e^{-\sqrt{8}(x+3)} H(x+3) \right].$$