

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata

28 gennaio 2020

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e si dica se il vettore  $\mathbf{v}_3$  è normalizzato rispetto alle norme con indice 1, 2 e  $\infty$ .

*Soluzione.* Il vettore  $\mathbf{v}_3$  è normalizzato rispetto alla norma  $\infty$ . I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

2. Si considerino le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta & -\beta \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e si determinino i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  per cui  $Q$  è una matrice ortogonale e per cui le matrici  $R$  e  $M$  sono una l'inversa dell'altra. Assegnati ad  $\alpha$  e  $\beta$  uno di questi valori, si calcolino  $\kappa_2(Q)$  e  $\kappa_\infty(R)$ , essendo  $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ . Si risolva infine il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $A = QR$  e  $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$ .

*Soluzione* La matrice  $Q$  è ortogonale per  $\alpha = \pm\sqrt{2}/2$ ,  $M$  è l'inversa di  $R$  per  $\beta = -1$ ,  $\kappa_2(Q) = 1$ ,  $\kappa_\infty(R) = 24$ ,  $\mathbf{x} = M(Q^T\mathbf{b}) = (\sqrt{2} + 1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ .

3. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x - \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e dire se  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.* La funzione data non è differenziabile termine a termine essendo discontinua in  $x = 0$ . La sua serie di Fourier è

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\right) \sin(2kx).$$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, le seguenti equazioni differenziali

$$y'' + \sqrt{2}y' + y = f(x), \quad \sqrt{2}y'' + y = f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

essendo  $f(x)$  la funzione dell'esercizio precedente.

*Soluzione.* La soluzione della prima equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}k}{k(1+16k^4)} \cos(2kx) + \frac{4k^2-1}{k(1+16k^4)} \sin(2kx).$$

La soluzione della seconda equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4\sqrt{2}k^2-1)} \sin(2kx).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{x}{x^2+5} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin 3(k-1)}{e^{ik}(k-1)} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = \pi i \left[ e^{\sqrt{5}k} H(-k) - e^{-\sqrt{5}k} H(k) \right],$$
$$f(x) = \frac{1}{2} [H(x+2) - H(x-4)] e^{i(x-1)}.$$