Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

9 gennaio 2020

Compito numero 1

1. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

   $$y'' - 2y = H(x-1) - H(x-5),$$

   dove $x \in \mathbb{R}$ e $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

   Soluzione.

   $$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x-5)} - \mathrm{e}^{\sqrt{2}(x-1)}\right], & x < 1, \\ \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x-5)} + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x-1)} - 2\right] & 1 \leq x < 5, \\ \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x-1)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x-5)}\right], & x \geq 5. \end{cases}$$

2. Si determini la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

   e la si utilizzi per calcolare il deteriminante di A e l'unica soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0, 1, 0]^T$.

   Soluzione.

   $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/9 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -3/28 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 28/9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   $$\det(A) = 12, \quad \mathbf{x} = [1, -1/6, -2, 11/6]^T.$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

   $$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è definita positiva e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 3$, si dica, motivando opportunamente la risposta, se il metodo di Gauss-Seidel è convergente e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

Soluzione. La matrice A è definita positiva se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$ e il metodo di Jacobi converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ oppure se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Se $\alpha = 3$, il metodo di Gauss-Seidel converge perché la matrice A risulta essere diagonalmente dominante in senso stretto. Le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/6, 7/6, -1/9]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/18, 73/54, -34/81]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = x/y - y', \quad x \in [1, 4] \\ y(1) = 1, y'(1) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{5}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 1/2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (5/4, 1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (7/4, 13/10)^T$.

5. Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

$$(a) \qquad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha}{\beta} h \left[3f(x_k, \eta_k) + 4f\left(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$$

$$(b) \qquad \eta_{k+1} = -\delta \eta_k + (1 - \delta)\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k).$$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile per $0 \leq \delta < 2$. Lo schema (a) ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = \frac{1}{8}$ e $\beta = \frac{7}{8}$.

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata
9 gennaio 2020

Compito numero 2

1. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$3y'' - y = H(x+3) - H(x+1),$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{3}/3(x+1)} - \mathrm{e}^{\sqrt{3}/3(x+3)}\right], & x < -3, \\ \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{3}/3(x+3)} + \mathrm{e}^{\sqrt{3}/3(x+1)} - 2\right] & -3 \leq x < -1, \\ \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{3}/3(x+3)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{3}/3(x+1)}\right], & x \geq -1. \end{cases}$$

2. Si determini la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare il deteriminante di A e l'unica soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0, 1, 0]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/9 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -3/28 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 28/9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12, \quad \mathbf{x} = [1, -1/6, -2, 11/6]^T.$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è definita positiva e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 3$, si dica, motivando opportunamente la risposta, se il metodo di Jacobi è convergente e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

Soluzione. La matrice A è definita positiva se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$ e il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ oppure se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Se $\alpha = 3$, il metodo di Jacobi converge perché la matrice A risulta essere diagonalmente dominante in senso stretto. Le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/6, 7/6, -1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/12, 17/12, -1/9]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y/x + y', \quad x \in [1/2, 4] \\ y(1/2) = 1, y'(1/2) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (3/2, 2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (5/2, 7/2)^T$.

5. Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

$$\begin{aligned} &(a) \qquad \eta_{k+1} = \delta\eta_k + (1-\delta)\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k), \\ &(b) \qquad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha}{\beta}h\left[4f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right], \end{aligned}$$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

Soluzione. Lo schema (a) è multistep esplicito ed è stabile per $0 \leq \delta < 2$. Lo schema (b) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lo schema (b) ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{3}{2}$.