Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

28 gennaio 2020

Compito numero uno

1. Si considerino le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta & -\beta \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e si determinino i valori di α e β per cui Q è una matrice ortogonale e per cui le matrici R e M sono una l'inversa dell'altra. Assegnati ad α e β uno di questi valori, si calcolino $\kappa_2(Q)$ e $\kappa_\infty(R)$, essendo $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Si risolva infine il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = QR$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

Soluzione La matrice Q è ortogonale per $\alpha = \pm\sqrt{2}/2$, M è l'inversa di R per $\beta = -1$, $\kappa_2(Q) = 1$, $\kappa_\infty(R) = 24$, $\mathbf{x} = M(Q^T\mathbf{b}) = (\sqrt{2}+1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$.

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

deteminare per quali valore del parametro α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1,\ 0,\ 2]^T$. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema e, assegnato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi considerando come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile per $\alpha \neq 0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$. Gli autovalori sono positivi per $\alpha > \sqrt{2}/2$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha > \sqrt{2}/2$ oppure $\alpha < -\sqrt{2}/2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2, 0, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/2, 0, 5/8]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y'y - 1}{x + 2}, & x \in [1, 4] \\ y(1) = 0, y'(1) = 1/2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/8, 5/12)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (11/48, 11/32)^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazioni differenziale

$$y'' + \sqrt{2}y' + y = f(x), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x - \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La soluzione dell' equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}k}{k(1+16k^4)} \cos(2kx) + \frac{4k^2-1}{k(1+16k^4)} \sin(2kx).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' + 5y' + 6y = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{7} \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ e^{6x}, & x < 0. \end{cases}$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova Scritta di Matematica Applicata

28 gennaio 2020

Compito numero due

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
e si dica se il vettore $\mathbf{v}_3$ è normalizzato rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞.

   Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_3$ è normalizzato rispetto alla norme ∞. I vettori ortonormali richiesti sono
$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

2. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
e utilizzarla per calcolare il determinante di A e la terza colonna dell'inversa di A.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/6 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = 6, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = [-3/2, 1, 1/2, -1/2]^T.$$

3. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{4}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2\beta f\left(x_k + \frac{5\beta}{4\alpha}h, \eta_k + \frac{5\beta}{4\alpha}hf(x_k, \eta_k)\right)\right]$$
e se ne studi la stabilità, la consistenza e la convergenza. Si classifichi, inoltre, il seguente schema numerico
$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2}(\delta + 1)\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$$

e se ne studi la stabilità al variare del parametro reale δ.

Soluzione. Il primo schema è di tipo monostep esplicito a due stadi e in quanto tale è stabile. È consistente e quindi convergente per $\alpha \neq 0$ e $\beta = 1/2$, del secondo ordine per $\alpha = 5/16$ e $\beta = 1/2$. Il secondo schema è di tipo multistep esplicito ed è stabile per $-3 \leq \delta \leq 1$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazioni differenziale

$$\sqrt{2}y'' + y = f(x), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x - \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine. *Soluzione.* La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4\sqrt{2}k^2 - 1)} \sin(2kx).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+5}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin 3(k-1)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}(k-1)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \pi\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{5}k} H(-k) - \mathrm{e}^{-\sqrt{5}k} H(k)\right],$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left[H(x+2) - H(x-4)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-1)}.$$