Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

18 febbraio 2020

Compito numero uno

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} -3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -14 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -3 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -1296, \quad x = [1, -2, 0, -1]^T.$$

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 0 \\ 4 & \beta & 4 \\ 0 & 2 & \beta \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale β A è invertibile e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si discuta la convergenza del metodo di Jacobi al variare del parametro β e, assegnato $\beta = 5$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 1)^T$. Si dica, infine, motivando opportunamente la risposta e senza fare calcoli, se nel caso $\beta = 9$, il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

Soluzione. La matrice A è invertibile per $\beta \neq 0, 4, -4$. Gli autovalori sono positivi per $\beta > 4$. Il metodo di Jacobi converge se $\beta > 4$ oppure $\beta < -4$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/5, -3/5, 1/5]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [11/25, -3/25, 11/25]^T$. Se $\beta = 9$, la matrice è a dominanza diagonale in senso stretto e pertanto il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

3. Si consideri il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{5}\left[3f(x_k,\eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{5}{4}h, \eta_k + \frac{5}{4}hf(x_k,\eta_k)\right)\right].$$

Dopo averlo classificato, si dica se è convergente e, in caso affermativo, si dica quale è il suo ordine. Infine, si utilizzi tale schema con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la soluzione del seguente problema in $x = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-1}{x+2}, & x \in [1,4] \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Lo schema è monostep esplicito a due stadi. È convergente del secondo ordine. $\eta_1 = -1/12$, $\eta_2 = -1/6$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazioni differenziale

$$y'' + \sqrt{2}y = f(x), \qquad \text{dove } f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x < -1, \\ x^2, & -1 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32}{(4\sqrt{2} - k^2\pi^2)k^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

La funzione data è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = \delta(x+1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = e^{x+1}(1 - e^{x+1})H(-x-1).$$