Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

11 gennaio 2021

L'esame è stato svolto in modalità telematica.

Gli esercizi assegnati agli studenti sono stati estratti dai seguenti testi.

1. Assegnate le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determinare il valore di α che rende Q non singolare, quello che la rende ortogonale, e il valore di β che rende M l'inversa di L. Fissati $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = -\frac{1}{3}$, e $A = QL$, si risolva nel modo più efficiente il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 2, 0)^T$.

Soluzione. Q è non singolare per $\alpha \neq 0$ e ortogonale per $\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. $M = L^{-1}$ per $\beta = -\frac{1}{3}$. $\mathbf{x} = MQ^T\mathbf{b} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

2. Si consideri la seguente matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & \beta & -\beta \end{bmatrix}.$$

Si determini al variare del parametro β lo spettro e il raggio spettrale. Si calcolino i valori di β che rendono Q ortogonale. Fissato uno di tali valori, si determini l'indice di condizionamento di Q con indice ∞, 1 e 2.

Soluzione. $\sigma(Q) = \{1, \sqrt{2}\beta\}$, $\rho(Q) = 1$ se $|\beta| \leq \sqrt{2}/2$ e $\rho(Q) = \sqrt{2}|\beta|$ altrimenti. Q è ortogonale per $\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. $cond(Q)_2 = 1$, $cond(Q)_1 = cond(Q)_\infty = 2$.

3. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare quindi, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A, la prima e seconda colonna dell'inversa di A e la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1,\ 0,\ 2)^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/10 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9/10 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 9$$

$A^{-1}\mathbf{e}_1 = (-17/9,\ -2/9,\ 10/9)^T$, $\quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (13/9,\ 1/9,\ -5/9)^T \quad \mathbf{x} = (-19/9, 2/9, 8/9)^T$.

4. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare quindi, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A, la prima e seconda colonna dell'inversa di A e la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1,\, 0,\, 2)^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/17 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 17/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -9/17 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 9$$

$A^{-1}\mathbf{e}_1 = (-1/9,\, 2/9,\, -1/9)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (-5/9,\, 1/9,\, 13/9)^T \quad \mathbf{x} = (19/9, -2/9, -35/9)^T.$

5. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di α il metodo iterativo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel risultano essere convergenti se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 0, 1)^T$. Fissato $\alpha = 1/2$, si calcolino le prime due iterate di entrambi i metodi considerando come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0)^T$.

Soluzione. Entrambi i metodi convergono per ogni valore reale di $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 1/2$ le iterazioni del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (2,\, 0\,, -1/6)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (7/3,\, 0,\, 0)^T$; le iterazioni di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = (2,\, 0\,, 0)^T$

6. Sia β un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ \beta & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β il metodo iterativo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel risultano essere convergenti se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$. Fissato $\beta = 1/2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi e fissato $\beta = 1$ si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel considerando come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

Soluzione. Entrambi i metodi convergono per ogni valore reale di β. Se $\beta = 1/2$ le iterazioni del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (2,\, -1/3\,, -1/5)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (12/5,\, -1/3,\, -2/15)^T$; le iterazioni di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1,\, -1/3\,, -2/15)^T$ e $= \mathbf{x}^{(2)} = (17/15,\, -1/3\,, -8/75)^T$

7. Si consideri il sistema $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate di tale metodo a partire da $x^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

8. Dopo aver classificato il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{6}\left[2f(x_k, \eta_k) + \alpha f\left(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ che lo rendono convergente del secondo ordine. Assegnati tali valori di α e β, applicarlo infine al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy, & x \in [1, 5], \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

con passo $h = \frac{1}{2}$, per approssimare la soluzione nel punto di ascissa $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. La formula è monostep, esplicita. È consistente per $\alpha = 4$ e $\forall \beta$. Essendo stabile è convergente per gli stessi valori dei parametri. È del secondo ordine per $\alpha = 4$ e $\beta = \frac{3}{4}$. $y(\frac{3}{2}) \simeq \eta_1 = \frac{115}{32}$.

9. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{y'}{y} - x, & x \in [0, 4] \\ y(0) = 1, y'(0) = 2, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, 3)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{21}{4}, \frac{7}{2})^T$.

10. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y' + 2y - x, & x \in [0, 4] \\ y(1/2) = 1, y'(1/2) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

11. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$ e dire se la serie di Fourier di $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'' - 2y' + 5y = f(x), \quad f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x.$$

Soluzione La serie di Fourier del termine noto è

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{(4k^2-1)\pi} \cos k\pi x.$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{2}{5\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{(25 - 6k^2\pi^2 + k^4\pi^4)(4k^2-1)\pi} \left[(5 - k^2\pi^2)\cos k\pi x - 2k\pi \sin k\pi x\right].$$

12. Eseguire i seguenti calcoli, dove $*$ indica l'operatore di convoluzione e H indica la funzione di Heaviside

    1. $e^{-3|x|} * [H(x+1) - H(x-2)]$
    2. $[e^{-(x-2)} H(x-2)] * [e^{-5x} H(x)]$
    3. $\mathcal{F}\left\{(e^{-2x} H(x-3) \sin 4x) * \left(\frac{e^{-2ix}}{x^2+1}\right)\right\}$
    4. $\mathcal{F}\left\{(e^{-5x} H(x-2) \sin 3x) * \left(\frac{e^{-5ix}}{x^2+1}\right)\right\}$
    5. $\mathcal{F}\left\{\delta(x - \frac{1}{5}) \cos x\right\}$, $\quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-ik}}{(k-\pi)} \sin\left(3(k-\pi)\right)\right\}$
    6. $\mathcal{F}\left\{\delta(x - \frac{1}{3}) \sin x\right\}$, $\quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-ik}}{(k-2)} \sin\left(3(k-2)\right)\right\}$
    7. $\mathcal{F}\left\{\frac{e^{-7ix}}{x^2+6x+10}\right\}$, $\quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i(k-3)}{25+(k-3)^2}\right\}$

    Soluzione.

    1.

    $$e^{-3|x|} * [H(x+1) - H(x-2)] = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{3x}(e^3 - e^{-6}), & x < -1 \\ \frac{1}{3}[(1 - e^{-3(x+1)}) + (1 - e^{3(x-2)})], & x \in [-1, 2) \\ \frac{1}{3} e^{-3x}(e^6 - e^{-3}), & x \geq 2 \end{cases}$$

    2.

    $$[e^{-(x-2)} H(x-2)] * [e^{-5x} H(x)] = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{4} e^{-5x+2}(e^{4x} - e^8), & x > 2 \end{cases}$$

3.
$$F(k) = \frac{\pi}{2\mathrm{i}} e^{-|k+2|-6} \left(\frac{e^{-3\mathrm{i}(k-4)}}{2+\mathrm{i}(k-4)} - \frac{e^{-3\mathrm{i}(k+4)}}{2+\mathrm{i}(k+4)} \right)$$

4.
$$F(k) = \frac{\pi}{2\mathrm{i}} e^{-|k-5|-10} \left(\frac{e^{-2\mathrm{i}(k-3)}}{2+\mathrm{i}(k-3)} - \frac{e^{-2\mathrm{i}(k+3)}}{2+\mathrm{i}(k+3)} \right)$$

5.
$$F(k) = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{(k-1)\mathrm{i}}{5}} + e^{-\frac{(k+1)\mathrm{i}}{5}} \right], \qquad f(x) = \frac{1}{2} e^{\pi\mathrm{i}(x-1)} [H(x+2) - H(x-4)]$$

6.
$$F(k) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[e^{-\frac{(k-1)\mathrm{i}}{3}} - e^{-\frac{(k+1)\mathrm{i}}{3}} \right], \qquad f(x) = \frac{1}{2} e^{2\mathrm{i}(x-1)} [H(x+2) - H(x-4)]$$

13. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale
$$-y'' + 9y = H(x+1) - H(x-2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.
$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} e^{3x}(e^3 - e^{-6}), & x < -1 \\ \frac{1}{18}[(1 - e^{-3(x+1)}) + (1 - e^{3(x-2)})], & x \in [-1,\, 2) \\ \frac{1}{18} e^{-3x}(e^6 - e^{-3}), & x \geq 2 \end{cases}$$

14. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale
$$y'' - 6y' + 5y = \delta(x-2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.
$$y(x) = -\frac{1}{4}[e^{5(x-2)} H(2-x) - e^{x-2} H(2-x)]$$