Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

22 febbraio 2021

L'esame è stato svolto sia in presenza che a distanza.

Gli esercizi assegnati agli studenti sono stati estratti dai seguenti testi.

1. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e calcolare, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A, la prima e la terza colonna dell'inversa di A e la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (2,\, 1,\, 0)^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/10 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -5$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = (1,\, 0,\, -2)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = (0,\, 2/5,\, 1/5)^T \quad \mathbf{x} = (2, -1/5, -18/5)^T.$$

2. Sia β un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β il metodo iterativo di Gauss-Seidel e di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$. Fissato $\beta = 1/2$, si calcolino le prime due iterate di entrambi i metodi considerando come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

Soluzione. Metodo di Jacobi: converge se $-1 < \beta < 1$ e le iterate sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1,\, 2\,, 1)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (5/2,\, 2,\, 5/2)^T$. Metodo di Gauss-Seidel: converge se $-1 < \beta < 1$ e le iterate sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1,\, 2\,, 5/2)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (7/4,\, 2,\, 17/8)^T$

3. Sviluppare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-1/2, 0), \\ 1 - x, & x \in [0, 1/2]. \end{cases}$$

Si dica inoltre se la serie trovata è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La serie non è differenziabile termine a termine ed ha la seguente espressione

$$S_f(x) = \frac{15}{8} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1-(-1)^k}{2(k\pi)^2}\right)\cos(2k\pi x) + \left(\frac{-2}{k\pi} + \frac{5(-1)^k}{2k\pi}\right)\sin(2k\pi x)\right]$$

4. Si consideri il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3}\left[f(x_k,\eta_k) + 2f\left(x_k+h, \eta_k + hf(x_k,\eta_k)\right)\right].$$

Si stabilisca una sua classificazione e si dica se è del secondo ordine. Si applichi, inoltre, tale schema al seguente problema di Cauchy per approssimare la soluzione nel punto $x = 1/2$ con $h = 1/2$

$$\begin{cases} y' = 3x, & x \in [0,2] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Lo schema dato è monostep del primo ordine. $\eta_1 = \frac{1}{2}$.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\infty,\infty]$

$$y'' - 3y' + 2y = \delta(x-3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = (1 - e^{x-3})e^{x-3}H(3-x).$$

6. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{x}{4-ix}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3}{k^2 - ik + 2}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = -8\pi i[e^{-4k}H(k)], \quad f(x) = e^{-2x}H(x) + e^{-x}H(-x)$$