Nome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

8 aprile 2021

L'esame è stato svolto sia in presenza che a distanza.
Gli esercizi assegnati agli studenti sono stati estratti dai seguenti testi.

1. Si consideri la seguente matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se la matrice P è invertibile e se i suoi autovalori sono positivi. Si determini il valore del parametro β affinchè Q sia inversa di P. Infine, si calcoli l'indice di condizionamento di P con indice 1, ∞ e 2.

Soluzione. P è invertibile e ha tre autovalori pari a uno. $\beta = -1$. $k(P)_\infty = 4$, $k(P)_1 = 9$, $k(P)_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$.

2. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9/2 & 10 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

e calcolare, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A e la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (7,\, 10,\, 6)^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 512$$

$$\mathbf{x} = (1, 0, 1/2)^T.$$

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = -y + 2y' + 2, \quad x \in [1, 3] \\ y(1) = 1, y'(1) = -1, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{16}, -\frac{25}{16})^T$.

4. Si consideri il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\frac{7}{6}f(x_k, \eta_k) - \frac{1}{6}f\left(x_k - 3h, \eta_k - 3hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Si stabilisca una sua classificazione e si dica se è del secondo ordine. Si applichi, inoltre, tale schema al seguente problema di Cauchy per approssimare la soluzione nel punto $x = 1/4$ con $h = 1/4$

$$\begin{cases} y' = 3x, & x \in [0, 2] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Lo schema dato è monostep del secondo ordine. $\eta_1 = \frac{3}{32}$.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\infty, \infty]$

$$y'' + 2y' - 15y = \delta(x-1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{8}[e^{-5(x-1)}H(x-1) - e^{3(x-1)}H(1-x)].$$

6. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{3x}{x^2+25}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(5k-\pi)}{k-\frac{\pi}{5}}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = 3\pi i[e^{5k}H(-k) - e^{-5k}H(k)], \quad f(x) = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}x}\,\frac{\mathrm{i}}{2}[H(x+5) - H(x-5)]$$