Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

17 giugno 2021

1. Risolvere il seguente sistema lineare mediante la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A dei coefficienti

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 = -26 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_4 = 15 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

e calcolare, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A e la seconda colonna dell'inversa di A.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (-1, -1, 2, 3)^T, \qquad \det(A) = 256, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (0, 0, -1/4, 1/4)^T.$$

2. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y' - \frac{y}{x}, \quad x \in [1, 4] \\ y(1) = 1, y'(1) = 2, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, \frac{5}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{13}{4}, \frac{37}{12})^T$.

3. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right), & x \in [-2, 0) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right), & x \in [0, 2], \end{cases}$$

e dire se tale serie è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione è pari, di conseguenza $b_k = 0$. La serie di Fourier è

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

con

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{(1+2k)\pi}\left(1-\cos\left((1+2k)\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{2}{(1-2k)\pi}\left(1-\cos\left((1-2k)\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{4}{1-4k^2}. \end{aligned}$$

4. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\sin(3x)\mathrm{e}^{-5x}H(x-2)\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}}{5+2k^2}\right\},$$

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2(5+\mathrm{i}(k-3))}}{5+\mathrm{i}(k-3)}-\frac{\mathrm{e}^{-2(5+\mathrm{i}(k+3))}}{5+\mathrm{i}(k+3)}\right], \\ f(x) &= \frac{\sqrt{10}}{20}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{5}{2}}|x+3|}. \end{aligned}$$