Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

8 luglio 2021

1. Risolvere il seguente sistema lineare mediante la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A dei coefficienti

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = 6 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4 \\ 2x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

e calcolare, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A e la prima colonna dell'inversa di A.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T, \qquad \det(A) = -2, \quad A^{-1}\mathbf{e}_1 = (-1, -1, 1, 2)^T.$$

2. Sia

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 2 & \gamma & 2 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $Ax = b$ con $b = [1\ 0\ 3]^T$. Si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 1]^T$.

Soluzione. A è invertibile per $\gamma \neq 0, \pm 2$, i suoi autovalori sono positivi per $\gamma > 2$. Il metodo di Jacobi è convergente se e solo se $\gamma > 2$ oppure $\gamma < -2$. Inoltre

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(0, -\frac{2}{\gamma}, \frac{2}{\gamma}\right)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{2+\gamma}{\gamma^2}, -\frac{4}{\gamma^2}, \frac{2+3\gamma}{\gamma^2},\right)^T.$$

3. Si risolva mediante la serie di Fourier la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + 6y(x) = 3x, \qquad x \in [-2, 2].$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{48(-1)^{k+1}}{k\pi(24 - k^2\pi^2)} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

4. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(3(x-2\pi))}{x-2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}}{16+k^2}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \pi\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(k+3)}\left[H(-k) - H(-k-6)\right],$$

$$f(x) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-4|x-1|}.$$