Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

22 luglio 2021

1. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per calcolare il suo determinante, la prima colonna della sua inversa e la soluzione del sistema $\mathbf{A}x = b$ con $b = [1,\ 0,\ 0,\ -2]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 2/9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 40/9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (37/40, -11/20, -9/20, 13/40)^T, \qquad \det(A) = 80, \quad A^{-1}\mathbf{e}_1 = (1/40, -3/20, 3/20, 9/40)^T.$$

2. Si classifichi il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{3}\alpha h \left[f(x_k, \eta_k) + 7f\left(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ che rendono stabile lo schema dato e che garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo.

Soluzione. La formula è monostep, esplicita, a uno stadio. Essendo monostep è necessariamente stabile. È convergente per $\alpha = 3/8$ e β qualsiasi, del second'ordine per $\alpha = 3/8$ e $\beta = 2/7$.

3. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-4, -\pi], \\ \cos(3x), & x \in [-\pi, \pi], \\ -2, & x \in [\pi, 4] \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, se la serie è differenziablie termine a termine.

Soluzione.

$$S_f(x) = \frac{\pi - 4}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(288 - k^2\pi^2)}{(144 - k^2\pi^2)k\pi} \sin \frac{k\pi^2}{4} \sin\left(k\frac{\pi}{4}x\right).$$

La serie non è differenziabile termine a termine in quanto $f(x)$ è discontinua in $x = -\pi$ e in $x = \pi$.

4. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y' - y = \mathrm{e}^{-(x-5)} H(x - 5), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x-5)}, & x \leq 5, \\ -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-(x-5)}, & x > 5. \end{cases}$$