Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

15 novembre 2021

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   dove α e β sono parametri reali. Verificare l'ortogonalità di Q e determinare i valori di α e β che rendono la matrice B l'inversa di A. Fissati tali valori, calcolare $\det(A)$, $\det(Q)$, $\det(M)$, dove $M = AQ$, e la matrice M^{-1}. Determinare infine lo spettro e il raggio spettrale di Q.

   Soluzione. La matrice Q è ortogonale e B è inversa di A per $\alpha = 1/4$ e $\beta = 1/2$; $\det(A) = 8$, $\det(Q) = 1$, $\det(M) = 8$, $\sigma(Q) = \{1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\}$, $\rho(Q) = 1$.

$$M^{-1} = Q^T B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}+1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix},$$

   mediante la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale, e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti nel modo più conveniente.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 18 \\ 0 & 10/3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   $\det(A) = 80$, $\mathbf{x} = (-1, 0, 1)^T$.

3. Classificare il metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{\alpha} \left[f(x_i, \eta_i) + f(x_i + \frac{\beta}{2}h, \eta_i + \frac{\beta}{2}hf(x_i, \eta_i)) \right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

essendo $y' = f(x,y)$, $y(a) = y_0$, $a \leq x \leq b$. Stabilire inoltre per quali valori dei parametri α e β il metodo è convergente e per quali è del second'ordine.

Soluzione. Il metodo è monostep esplicito, pertanto è stabile per $\alpha \neq 0$. È consistente, e quindi convergente, per $\alpha = 2$, del second'ordine per $\alpha = \beta = 2$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y = f(x), \qquad x \in [-3, 3]\,,$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} -(2x + \pi), & -3 \leq x < -\pi/2, \\ \pi \cos(x), & -\pi/2 \leq x < \pi/2, \\ 2x - \pi, & \pi/2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{24}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9a_k}{18 - k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right)$$

dove i coefficienti a_k sono dati da

$$a_k = \frac{12(-1)^k}{(k\pi)^2} + \cos\left(k\frac{\pi^2}{6}\right)\left[\frac{6\pi}{9 - k^2\pi^2} - \frac{12}{(k\pi)^2}\right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(x + 4), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ e^{-(x+4)}(1 - e^{-(x+4)}) & x \geq -4, \end{cases}$$