Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

13 gennaio 2022

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \alpha & 0 \\ -\alpha & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove α è un parametro reale. Si stabilisca senza fare calcoli, e motivando opportunamente la risposta se la matrice A è invertibile e quale è il suo raggio spettrale. Si determinino i valori di α che rendono la matrice Q ortogonale. Fissato quindi uno di tali valori, si calcoli l'indice di condizionamento di Q in norma 1, 2 e ∞. infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $Bx = b$ dove $B = AQ$ e $b = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. La matrice A, essendo triangolare, ha gli autovalori sulla diagonale, quindi è invertibile e $\rho(A) = 4$. La matrice Q è ortogonale per $\alpha = \pm 1/2$; $\text{cond}_\infty(Q) = \text{cond}_1(Q) = (2 + \sqrt{3})/2$, $\text{cond}_2(Q) = 1$. La soluzione del sistema è

$$\mathbf{x} = \left(\frac{\sqrt{3} - 3}{8}, \frac{3\sqrt{3} + 1}{8}, \frac{3}{2} \right)^T.$$

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 6/7 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 14/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 & 6/7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 12, \quad \mathbf{x} = [-7/6, 2, 1/2, -5/3]^T.$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0$. Il metodo di Jacobi converge per ogni valore di γ. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 0, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 0, 0]^T$. Essendo il metodo consistente, lo stesso vettore è la soluzione del sistema.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xyy' - 1, \quad x \in [2, 5] \\ y(2) = 0, y'(2) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 5/2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{16}, \frac{155}{256})^T$.

5. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha + 2}\left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{3\alpha}{\beta}h, \eta_k + \frac{3\alpha}{\beta}hf(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = 2\eta_k - (1 + 4\gamma^2)\eta_{k-1} + h\left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$

Soluzione. Il primo metodo è sempre stabile, essendo monostep, è consistente e quindi convergente per $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, è di ordine 1 e non può raggiungere l'ordine 2. Il metodo multistep non è stabile per qualsiasi valore del parametro γ.

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

13 gennaio 2022

Compito numero 2

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \beta & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove β è un parametro reale. Si stabilisca senza fare calcoli, e motivando opportunamente la risposta se la matrice A è invertibile e quale è il suo raggio spettrale. Si determinino i valori di β che rendono la matrice Q ortogonale. Fissato quindi uno di tali valori, si calcoli l'indice di condizionamento di Q in norma 1, 2 e ∞. infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $Bx = b$ dove $B = QA$ e $b = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. La matrice A, essendo triangolare, ha gli autovalori sulla diagonale, quindi è invertibile e $\rho(A) = 4$. La matrice Q è ortogonale per $\alpha = \pm\sqrt{3}/2$; $\text{cond}_\infty(Q) = \text{cond}_1(Q) = (2+\sqrt{3})/2$, $\text{cond}_2(Q) = 1$. La soluzione del sistema è

$$\mathbf{x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}+1}{12}, -\frac{1}{3} \right)^T.$$

2. Si risolva mediante la fattorizzatione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 6/7 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 14/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 & 6/7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 12, \quad \mathbf{x} = [1, 0, -1, 2]^T.$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni valore di γ. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/2, 0, -1/8]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [9/16, 0, 0]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xyy' - 1, & x \in [2, 5] \\ y(2) = 0, y'(2) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 5/2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{16}, \frac{155}{256})^T$.

5. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\beta - 2}\left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{2\beta}{\alpha}h, \eta_k + \frac{2\beta}{\alpha}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\delta \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = 4\delta\eta_k - (1 + 4\delta^2)\eta_{k-1} + h\left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$

Soluzione. Il primo metodo è sempre stabile, essendo monostep, è consistente e quindi convergente per $\beta = 4$ e $\alpha \neq 0$, è di ordine 2 per $\alpha = 8$ e $\beta = 4$. Il metodo multistep è stabile per $\delta = 0$.