Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

31 gennaio 2022

1. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Si calcoli, mediante la fattorizzazione PA=LU, il suo determinante, la prima colonna della sua inversa e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [0, 1, 0]^T$.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -2, \quad A\mathbf{e}_1 = (0, 1, -1)^T, \quad \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2\gamma & 1 & 0 \\ 1 & -4\gamma & -1 \\ 0 & -1 & 2\gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile. Si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0, \pm \mathrm{i}/2$. Il metodo di Jacobi converge per $\gamma > 1/2$ oppure $\gamma < -1/2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 0)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (1/2, 1/8, 1/16)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y' + y}{x + 1}, \quad x \in [2, 5], \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \end{cases}$$

   e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3/2$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{4}, \frac{13}{6})^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{7}{3}, \frac{145}{48})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - y = f(x), \qquad x \in [-2, 2],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -2 \le x < 0, \\ 1 - x, & 0 \le x \le 2, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione f è differenziabile e la serie della soluzione y é

$$S_y(x) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k - 1)}{k^2(4 + k^2\pi^2)} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{3\mathrm{i}x}\mathrm{i}(x-2)}{7 + (x-2)^2}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{3\mathrm{i}k}}{(5 + 2\mathrm{i}k)(5 - 2\mathrm{i}k))}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \pi e^{-2\mathrm{i}(k-3)}\left[e^{-\sqrt{7}(k-3)}H(k-3) - e^{\sqrt{7}(k-3)}H(-k+3)\right],$$

$$f(x) = \frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}|x+3|}.$$